Kombinatorik

Jörn Loviscach

Versionsstand: 31. Oktober 2009, 17:23

1 Begriff Kombinatorik; Zahl aller Teilmengen

Die Kombinatorik – ein recht kleines Gebiet der Mathematik – befasst sich mit dem Abzählen von Mengen. Das wird zum Beispiel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt (Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass von zehn Bauteilen zwei kaputt sind?) und in beim Abschätzen der Sicherheit von Passwörtern (Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Passwort mit sechs Buchstaben samt Sonderzeichen zu bilden?). Der übliche Trick der Kombinatorik besteht darin, ein gegebenes Problem auf eine bekannte Situation abzubilden, in der man leicht zählen kann.

Ein einfaches Beispiel: Wieviel Teilmengen kann man aus einer gegebenen Menge A bilden? (Die Menge dieser Teilmengen heißt Potenzmenge 2^A; die kommt aber in der Ingenieurmathematik selten vor.) Sei A zum Beispiel die Menge $\{\bigcirc, \square, \triangle\}$. Dann sind deren Teilmengen:

[1]

Man muss also alle Möglichkeiten angeben, dass jedes der drei Elemente von A enthalten ist oder nicht enthalten ist. Das macht [2] Möglichkeiten.

Dasselbe Problem lässt sich auch ganz anders beschreiben. Drückt man „enthalten" und „nicht enthalten" mit 1 und 0 aus, ergibt sich diese Tabelle:

[3]

Es gibt also so viele Möglichkeiten, wie es Binärzahlen mit drei Bit gibt, also

[4] . Statt Teilmengen zu zählen, könnte man also auch Binärzahlen zählen. Tricks dieser Art sind üblich für die Kombinatorik.

Offensichtlich gilt allgemein für die Zahl der Teilmengen jede endliche (oder unendliche) Menge M:

[5]

2 Variation mit Wiederholung

Diesen Trick kann man auch in anderen Zahlensystemen anwenden: Eine Urne enthalte zehn allesamt voneinander verschiedene Dinge. Man ziehe dreimal einen Gegenstand aus der Urne und lege ihn sofort wieder zurück:

[6]

Wieviel Möglichkeiten gibt es, bestimmte Reihenfolgen („Variationen“) der Gegenstände zu ziehen? Offensichtlich [7] .

Auch dieses Problem lässt sich in Zahlen übersetzen: Man stellt sich einfach vor, dass die zehn Gegenstände mit Zahlen von 0 bis 9 beklebt sind. Was man dann zieht, ist eine dreistellige Zahl im Dezimalsystem:

[8]

Jede solche Zahl steht eindeutig für eine bestimmte Reihenfolge. Es gibt [9] dreistellige Zahlen im Dezimalsystem.

Entsprechend: Wie viele verschiedene Passwörter mit exakt sechs Zeichen kann man aus den 52 Zeichen von a bis Z bilden?

[10]

Dieses exponentielle Wachstum ist ein typischer Fall von „kombinatorischer Explosion“. Bei Passwörtern nutzt man die kombinatorische Explosion zur Sicherheit; umgekehrt beißt sie einen bei der Softwareentwicklung, weil die Laufzeit eines Programms dadurch nicht mehr zu bändigen ist.

3 Variation ohne Wiederholung, Permutation, Fakultät

Hat man zum Beispiel sieben allesamt voneinander verschiedene Elemente, ist eine Permutation davon eine bestimmte Reihenfolge aller dieser sieben Elemente. (Reihenfolge wichtig: „Variationen“) Man kann sich hier eine Urne mit den sieben verschiedenen Elementen vorstellen, aus der man – jetzt *ohne* Zurücklegen – eines nach dem anderen zieht, bis die Urne leer ist. Das kann man als Baum aufmalen:

Also gibt es Permutationen.

Diese Zahl heißt 7!, gesprochen: „sieben Fakultät“ [factorial]. Entsprechend ist die Definition für $n!$ mit $n \in \mathbb{N}^+$. Um diverse Formeln zu vereinfachen, definiert man 0! als .

Die Fakultät ist von den Funktionen, die man in der Ingenieurmathematik betrachtet, diejenige, die am schnellsten wächst – schneller als jede Potenz $x \mapsto x^n$ und sogar schneller als jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$. Das ist noch ein Fall von kombinatorischer Explosion. Beispiele:

Nicht wundern: Der Windows-Taschenrechner kann die Fakultät auch für gebrochene Zahlen berechnen. Dann sollte man aber eigentlich nicht mehr von der Fakultät sprechen, sondern von der (um eins nach links verschobenen) Gamma-Funktion.

4 Kombination ohne Zurücklegen, Binomialkoeffizient

Man ziehe ohne Zurücklegen drei Elemente aus einer Urne mit sieben allesamt voneinander verschiedenen Elementen. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür, wenn die Reihenfolge egal ist, es also nur darauf ankommt, ob ein Element gezogen ist oder nicht? (Reihenfolge egal = „Kombinationen“)

Die gleiche Frage stellt sich bei Mengen: Wieviel dreielementige Teilmengen hat eine siebenelementige Menge?

[16]

Und beim Lotto: Wieviel Möglichkeiten gibt es für sechs Richtige aus 49 Zahlen, ohne Zusatzzahl?

[17]

Die Lösung auf alle diese Fragen heißt Binomialkoffizient, beim Lotto [18] , gesprochen „49 über 6“ [49 choose 6]. Vorsicht: nicht mit einem Vektor verwechseln!

Um dies auszurechnen, kann man so vorgehen: Zunächst bestimmt man, wieviel Möglichkeiten es gibt, 6 Zahlen aus 49 in *fester* Reihenfolge zu ziehen:

[19]

Dann hat man aber viel zu viel gezählt, denn folgende Reihenfolgen führen alle zu derselben Lottozahl:

[20]

Von diesen Varianten gibt es [21] . Also hat man für den Binomialkoeffizienten:

[22]

Und allgemein für n, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$:

[23]

In der Formelsammlung steht dafür die scheinbar einfachere Formel:

[24]

Diese Formel ist aber äußerst unpraktisch. Beispiel: Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus 1000 verschiedenen Elementen 2 verschiedene (also ohne Zurücklegen) auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu beachten?

25

5 Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen eines zu wählen?

26

Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen alle bis auf eines zu wählen?

27

Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen keines zu wählen?

28

Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen alle zu wählen? (Reihenfolge egal)

29

Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Elementen alle bis auf k zu wählen? (Reihenfolge egal)

30

Man kann die Binomialkoeffizienten als „Pascalsches Zahlendreieck“ auflisten:

31

Dabei ergibt sich jede Zahl als die Summe der beiden Zahlen links und rechts darüber. Beispiel: $\binom{6}{4} =$ 32 . Das kann man sich so erklären:

33

6 Allgemeine binomische Formel

Der Name „Binomialkoeffizent“ kommt nicht ohne Grund vom „Binom“, einem Ausdruck mit zwei Termen wie $(a+b)^{42}$, vergleiche den Begriff *Poly*nom. Wenn man $(a+b)^{42}$ ausmultipliziert, ergibt sich:

34

Allgemein gilt offensichtlich für $(a+b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$:

35