Vektorrechnung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 5. Oktober 2009, 18:30

1 Rechnen mit Pfeilen

Für Pfeile kann man eine Addition, eine Subtraktion und eine Multiplikation mit Zahlen erfinden:

1

Das klappt in zwei Dimensionen (Ebene) ebenso wie in drei Dimensionen (Raum). Pfeile werden typischerweise als $\vec{a}, \ldots, \vec{z}$ geschrieben.

Ein Pfeil wird vollständig durch seine Länge und seine Richtung beschrieben. Um die Addition komplett zu machen, benötigt man allerdings auch zusätzlich einen Pfeil mit Länge 0 und unbestimmter Richtung: den Nullpfeil $\vec{0}$. Er hat die Rolle der 0 in der Addition: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für jeden Pfeil $\vec{a}$.

2 Von Pfeilen zu Vektoren

Pfeile werden als gleich betrachtet, wenn sie nur parallel gegeneinander verschoben sind. Alle Pfeile gleicher Länge und gleicher Richtung bilden einen Vektor:

2

Die Bezeichnung „Vektor“ stammt vom lateinischen Wort für Träger.

In Handschrift schreibt man zwei- und dreidimensionale Vektorgrößen heute meist mit Pfeilen, nach dem Muster $\vec{a}$. In alten deutschen Schulbüchern finden sich stattdessen Sütterlinbuchstaben. In physikalischen Veröffentlichungen werden zwei- und dreidimensionale Vektoren meist mit fetten Buchstaben wie $\mathbf{a}$ geschrieben. Je abstrakter die Vektoren werden (Raum-Zeit: vier Dimensionen; Funktionen als Vektoren: unendlich viele Dimensionen), um so eher schreibt man ganz schlichte Buchstaben wie a.

3 Gerichtete und ungerichtete Größen

In der Physik verwendet man Pfeile, um gerichtete Größen zu beschreiben:

[3]

Vorsicht: Während man in der Mathematik (zunächst) parallel verschiebbare Pfeile („freie“ Vektoren) betrachtet, ergeben die Pfeile der Physik meist nur an einem festen Punkt Sinn („gebundene“ Vektoren).

Eine ungerichtete Größe nennt man in der Physik einen „Skalar“ [scalar], von der (Mess-)Skala. Dazu zählt man – je nach Modell/Theorie! – typischerweise:

[4]

Physikalische Größen können nicht nur ungerichtet (skalar) oder vektoriell gerichtet sein, sondern sich auch komplizierter verhalten. Beispiel: wie schwer es ist, ein Objekt um eine bestimmte Achse zu drehen, wird durch den Trägheits*tensor* beschrieben (nicht Vektor, nicht Skalar).

4 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ und der Raum $\mathbb{R}^3$

Um mit Vektoren sinnvoll rechnen zu können, drückt man sie in Zahlen aus:

$\mathbf{a}$ = [5] ist der Vektor in der Ebene, der zwei Einheiten nach rechts und drei nach oben zeigt. Diese Zahlen heißen „Komponenten“ des Vektors; ein Punkt hat dagegen „Koordinaten“.

Gegeben zwei Punkte, kann man den Differenzvektor (auch: Abstandsvektor) dazwischen aus deren Koordinaten ausrechnen:

[6]

Das Dreifache von $\mathbf{a}$ ist $3\mathbf{a} =$ [7] . Der Pfeil $\mathbf{b} =$ [8] zeigt vier Einheiten nach links und zwei nach oben. Die Summe $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ist dann der Pfeil [9] .

Entsprechend werden Pfeile im Raum zu dreidimensionalen Spaltenvektoren wie $\begin{pmatrix} 13 \\ 42 \\ -23 \end{pmatrix}$. Die Bedeutung der Zahlen darin hängt von der Wahl der Achsen ab. Diese ist in der dreidimensionalen Physik nicht so klar wie in der mathematischen Ebene.

Die Menge aller solchen Spaltenvektoren mit zwei reellen Komponenten heißt $\mathbb{R}^2$, ausgesprochen „er zwo“. Die Menge aller solchen Spaltenvektoren mit drei reellen Komponenten heißt $\mathbb{R}^3$, „er drei“. Sie ahnen, wie die Menge der Spaltenvektoren mit 42 Komponenten heißen wird. Innerhalb jeder dieser Mengen kann man Vektoren addieren. Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist jeweils der Vektor, bei dem alle Komponenten gleich null sind.

In den USA nimmt man eckige Klammern: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. In Matlab und Octave gibt man Spaltenvektoren also nach dem Muster `[1;4;-2]` ein.

Die Mengen $\mathbb{R}^n$ führen ein Doppelleben: Mal fasst man sie als Mengen von Punkten auf: $(2|3) \in \mathbb{R}^2$, und mal fasst man sie als Mengen von Spaltenvektoren auf: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Achten Sie auf den Zusammenhang. (Englisch schreibt man Punkte in der Form $(2,3)$, was im Deutschen zu Verwechselungen mit dem Dezimalkomma führen kann.) Die einfachste Übersetzung zwischen Punkten und Vektoren bieten die „Ortsvektoren“: Der Punkt $(2|3)$ hat den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

[10]

5 Rechengesetze

Es gelten die üblichen Rechengesetze: Bei der Addition von Vektoren sind Klammerung und Reihenfolge egal:

11

Bei der Multiplikation von Vektoren mit Zahlen kann man Summen von Zahlen und Summen von Vektoren ausmultiplizieren:

12

6 Standardbasis

Die Vektoren der Räume $\mathbb{R}^n$ lassen sich simpel zerlegen. Beispiel am $\mathbb{R}^3$:

13

Die Vektoren auf der rechten Seite bilden die „Standardbasis" des $\mathbb{R}^3$. Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich aus diesen Vektoren zusammensetzen; welche Vielfachen dieser Vektoren nötig sind, ist eindeutig bestimmt. Die drei Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ nennt man heute typischerweise $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$. In alten Texten stehen statt dessen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

7 Länge

Die Länge $\|\mathbf{a}\|$ oder $|\mathbf{a}|$ eines Vektors $\mathbf{a}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ oder dem $\mathbb{R}^3$ lässt sich leicht per Pythagoras aus seinen Komponenten bestimmen:

14

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt Einheitsvektor [unit vector]. Jeder Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ kann in einen Einheitsvektor gleicher Richtung umgewandelt werden:

15

Der Einheitsvektor zu einem Vektor **a** (der nicht der Nullvektor sein darf) heißt $\mathbf{a}^0$. Das ist *keine* Potenz!

8 Skalarprodukt

In der Mechanik kommt das Produkt „(Weg) mal (Kraft in Wegrichtung)“ vor. Hier werden zwei Vektoren multipliziert. Diese Art, zwei Vektoren zu multiplizieren und dabei eine Zahl – also einen Skalar – zu erhalten, nennt sich Skalarprodukt und wird für Pfeile gerne mit einem dicken Punkt geschrieben [daher im Englischen: dot product].

Geometrisch findet man für das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zweier Vektoren **a** und **b**:

16

Wie bei einem Produkt von Zahlen kann man Faktoren herausziehen und Summen ausmultiplizieren:

17

Damit lassen sich beliebige Skalarprodukte ausrechnen, ohne dass man die Längen der beiden Vekoren und den Winkel zwischen ihnen bestimmt:

18

Das Skalarprodukt eines Vektors **a** mit einem Vektor **b** ist offensichtlich dann und nur dann gleich null, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. (Man sagt, dass der Nullvektor auf jedem Vektor senkrecht steht.)

9 Kreuzprodukt

Im $\mathbb{R}^3$ und *nur* dort, also in drei Dimensionen, gibt es ein weiteres wichtiges Produkt von Vektoren. Es liefert keine Zahl, sondern einen neuen Vektor (streng genommen einen Pseudovektor) als Ergebnis. Deshalb heißt es Vektorprodukt oder wegen der Schreibweise $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ auch Kreuzprodukt.

In der Physik kommt das Vektorprodukt zum Beispiel bei der Drehbewegung vor. Wenn $\boldsymbol{\omega}$ die Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit angibt und **r** ein Vektor von der Achse zu einem Punkt des rotierenden Körpers ist, ist der Geschwindigkeitsvektor des Punkts gleich $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Geometrisch legen drei Eigenschaftenkann das Vektorprodukt eindeutig fest:

1. Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht auf beiden senkrecht.

   19

2. Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist so gerichtet, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Händigkeit von $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ haben (Physik: typischerweise rechtshändig).

   20

3. Die Länge des Vektorprodukts von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist gleich der Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms. (Uh-oh: Länge gleich Fläche!)

   21

Die letztere Eigenschaft kann man benutzen, um die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit dem Winkel ϕ zwischen den beiden auszudrücken:

22

Algebraisch bestimmt sich das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

23

Wie man auf diesen komischen Ausdruck kommt, wird leider erst im zweiten Semester bei den Determinanten klar.