Elementare Längen, Flächen und Volumina. Bogenlänge. Rotationskörper

Jörn Loviscach

Versionsstand: 10. Januar 2010, 16:39

1 Elementare Längen, Flächen und Volumina

Der Umfang des Einheitskreises ist vom Bogenmaß bekannt. Wenn man den Einheitskreis um den Faktor r skaliert, hat man einen Kreis mit Radius r. Bei Skalieren um den Faktor r ändern sich alle Flächen um den Faktor r^2, also:

1

Die Fläche eines Kreises mit Radius r muss nach r abgeleitet den Umfang ergeben. Außerdem ist sie null für $r = 0$. Also:

2

Ein Quader hat das Volumen:

3

Dieses Volumen bleibt gleich, wenn man die Querschnittsfläche auf allen Höhen gleichartig umformt. Stellen Sie sich eine Packung Spaghetti vor!

4

So ein Gebilde heißt gerader Zylinder oder im Spezialfall, dass die Querschnittsfläche ein Vieleck [polygon] ist, ein gerades Prisma. Wenn die Querschnittsfläche eine Kreisscheibe ist, spricht man von einem geraden Kreiszylinder.

Stellt man sich einen geraden Zylinder als Stapel von Bierdeckeln vor, ist klar, dass man ihn neigen kann, ohne sein Volumen oder seine Höhe zu ändern. Es ergibt sich ein schiefer Zylinder (oder im Spezialfall ein schiefes Prisma oder ein schiefer Kreiszylinder):

5

Lässt man einen Körper von einer ebenen Grundfläche ausgehend geradlinig auf einen Punkt zulaufen, hat man einen Kegel. Im Spezialfall, dass die Grundfläche ein Vieleck ist, spricht man von einer Pyramide. Offensichtlich kann man jeden Kegel bei gleicher Höhe und gleichem Volumen in eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche umformen:

6

Es genügt also, sich das Volumen dieser Pyramide zu überlegen. Ein Würfel mit Kantenlänge a zerfällt in sechs solche Pyramiden der Grundfläche a^2 und Höhe $a/2$:

7

Also ist das Volumen einer Pyramide (und damit das Volumen eines Kegels!):

8

Eine Kugel des Radius r hat Schicht für Schicht die gleiche Querschnittsfläche wie ein gerader Kreiszylinder mit Radius r und Höhe $2r$, den man oben und unten mit einem Kegel ausgehöhlt hat:

9

Also ist das Volumen der Kugel:

10

Die Oberfläche der Kugel muss die Ableitung davon sein:

11

2 Bogenlänge

Gegeben sei der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion f zwischen $x = a$ und $x = b$. Wie lang ist die Kurve – in dem Sinne, dass man ein Maßband daran legt?

12

Vorüberlegung: Wie kann ich von der Fahrtenschreiberkurve $t \mapsto v(t)$ eines Lasters auf die gefahrene Entfernung (die gefahrene, nicht Luftlinie!) schließen?

13

Welche Geschwindigkeit steht auf dem Tacho, wenn ich so über den Graphen von f fahre, dass ich die Stelle x zur Zeit x erreiche?

14

Also ist die „Bogenlänge“ [arc length]:

15

Alternativ kann man sich das auch mit einem Polygonzug veranschaulichen:

16

3 Volumen von Rotationskörpern

Ein Rotationskörper [solid of revolution] entstehe durch Rotation des Funktionsgraphen $x \mapsto r(x) \geq 0$ um die x-Achse. An der Stelle x sei seine Querschnittfläche eine Kreisscheibe mit dem Radius $r(x)$. (Hier wird nicht der Fall betrachtet, dass der Graph z. B. um die z-Achse gedreht wird!)

Wieder im Sinne eines Stapels von Bierdeckeln ist das Volumen V des Körpers zwischen $x = a$ und $x = b$:

17

Das lässt sich auch anderes verstehen: Der mittlere Wert $\overline{R}$ des Abstands von der x-Achse für alle Punkte zwischen der Achse und der Kurve ist:

18

Im Nenner steht aber die Fläche A unter der Kurve $x \mapsto r(x)$. Also gilt:

19

Anschaulich heißt das: Das Volumen V ist die Fläche unter der Kurve mal dem Weg des Schwerpunkts (Schwerpunkt der *Fläche*!) bei der Rotation (zweite

Pappus-Guldinsche Regel).

20

4 Oberfläche von Rotationskörpern

In der Situation des vorigen Abschnitts ergibt sich die Fläche M analog zur Länge einer Kurve:

21

Vorsicht: Dies ist nur die „Mantel“fläche. Gegebenfalls muss man noch die Flächen des Deckels unten und oben berücksichtigen!

Diese Formel lässt sich auch anderes verstehen: Der mittlere Abstand $\overline{r}$ des Abstands von der x-Achse für alle Punkte auf (!) der Kurve ist:

22

Im Nenner steht aber die Bogenlänge L der Kurve. Also gilt:

23

Anschaulich heißt das: Die Mantelfläche M ist die Länge unter der Kurve mal dem Weg ihres Schwerpunkts (Schwerpunkt der *Kurve*!) bei der Rotation (erste

Pappus-Guldinsche Regel).

[24]