Lineare Näherung. Anwendungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 1. Januar 2010, 17:11

1 Lineare Näherung

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, existiert dort ihre Ableitung f' und es gilt:

1

Oder mit dem klein-o von Landau geschrieben:

2

In dieser Schreibweise erkennt man deutlich die Tangentengerade und den – unbenannten und im Detail unbekannten – Rest.

Die Tangentengerade an den Graphen an der Stelle x_0 ist die *lineare Näherung* der Funktion f an der Stelle x_0. Statt die Funktion selbst zu untersuchen, genügt es oft, nur die lineare Näherungen zu betrachten – wenn man sich nicht zu weit von x_0 wegbewegt. Was „nicht zu weit weg" dabei heißen soll, ist noch zu untersuchen.

Die lineare Näherung hilft, Funktionswerte zu schätzen, und ist außerordentlich wichtig, um das Schwingungs- und Dämpfungsverhalten komplexer Systeme zu untersuchen – dort natürlich keine lineare Näherung in einer Dimension, sondern zum Beispiel in Hunderttausenden von Dimensionen. Hier findet man charakteristische Schwingungsfiguren („Moden", „Eigenschwingungen").

Beispiel: Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ hat für $x = 100$ einen bekannten Wert. Welchen Wert hat sie aber für $x = 103$? Das lässt sich mit der Tangentengerade – also der linearen Näherung – schätzen: Statt den Funktionswert $f(103) = \sqrt{(}103)$ auszurechnen, schauen wir auf der Tangentengerade nach. Das ist viel einfacher auszurechnen:

3

Also wäre ein Schätzwert für $\sqrt{103}$:

4

Allerdings ist diese Zahl nackt noch nicht allzu hilfreich, weil wir keine Idee haben, wie groß der Fehler ist. Dies Argument gilt ja auch bei Messwerten, insbesondere in der Physik.

2 Fehler der linearen Näherung

Hier noch einmal die lineare Näherung mit dem Landau-Symbol:

5

Man weiß hier zunächst nur, dass $o(h)$ für $h \to 0$ schnell klein wird: Mindestens so schnell, dass 6 . Man weiß aber nicht, wie groß $o(h)$ für ein bestimmtes h ist – zum Beispiel für $h = 3$ wie im Beispiel mit $\sqrt{103}$.

Kann man die Funktion f zweimal stetig ableiten, lässt sich aber eine Obergrenze für den Fehler angeben.

Zunächst überlegt man sich dazu, was das Integral $\int_0^h f'(x_0 + u)\,du$ ergibt:

7

Das liefert eine interessante Art, den Funktionswert $f(x_0 + h)$ auszurechnen:

8

Indem man den gleichen Trick auf f' statt auf f anwendet, findet man für $f'(x_0 + u)$:

9

Beides ineinander eingesetzt, liefert:

10

Und nach Auseinanderziehen der Summe im äußeren Integral:

11

Nun hat man also plötzlich einen exakten Ausdruck für den Fehler der linearen Näherung. Den wollen wir aber *nicht* exakt ausrechnen. Wozu sonst die lineare Näherung? Die große Frage ist vielmehr, ob man mit absoluter Sicherheit sagen, dass der Betrag des Fehlers nicht größer wird als, sagen wir, 0,42. Kann man eine Zahl angeben, die sicher größer oder gleich dem Betrag des Fehlers ist?

Und das geht so: Erstens ist der Betrag eines Integrals immer höchstens so groß wie das Integral des Betrags:

12

Zweitens ist das Integral einer Funktion immer höchstens so groß wie das Maximum der Funktion mal die Länge des Integrationsintervalls:

13

Beides nimmt man zusammen, um eine Zahl zu finden, die sicherlich größer oder gleich dem Fehler ist. Sei dazu $M := \max_{x_0 \le x \le x_0+h} |f''(x)|$. Dann gilt für den Betrag des Fehlers:

14

Wenn man sich weit von x_0 wegbewegt, kann das Maximum des Betrags der zweiten Ableitung wachsen; vor allem wird aber der Faktor h^2 wachsen und so die Näherung unbrauchbar machen. Das erklärt den Ausdruck „nicht zu weit weg“ vom Anfang.

Beim Beispiel mit $\sqrt{103}$ kann man M so bestimmen:

15

Also wissen wir nun mit Fehlergrenzen:

16

Zum Vergleich: Der exakte Wert ist $\sqrt{103} = 10{,}148891\ldots$.

3 Ausblick: Taylor-Polynome

Ähnliche Überlegungen kann man für höhere Ableitungen anstellen. Es ergibt sich dann ein Polynom („Taylor-Polynom"), dass sich an einer Stelle x_0 bestmöglich an die Funktion f schmiegt:

17

Hier schon vorab die nun nicht mehr überraschenden Formeln für die n-te Näherung:

18

Und für ihren maximalen Fehler:

19

Wenn man die Näherung bis $n \to \infty$ laufen lässt (Grenzwert!), wird das Taylor-Polynom zur Taylor-Reihe. Oft ist der Rest dann null. (Bei welchen Funktionen haben wir solche Potenzreihen schon gesehen?) Mehr dazu im zweiten Semester.

4 Numerische Schätzung von Ableitungen

Signale erhält man oft als Sammlung von Zahlen mit festem Zeitabstand h:

20

Angenommen, hier wäre tatsächlich eine differenzierbare Funktion f abgetastet worden, die auch für alle reellen Zeiten zwischen den Abtastpunkten definiert ist. Kann man dann aus den Messwerten die Ableitung von f schätzen?

Die naive Lösung ist, die Sekantensteigung von jeder Mess-Stelle x_0 nach rechts als Näherung für $f'(x_0)$ zu nehmen:

21

Das ist aber aus der Balance. Schon für eine quadratische Parabel ist dieser Wert im Allgemeinen nicht exakt. Beispiel: $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ an $x_0 = 2$ mit $h = 1$:

22

Besser ist, die Sekantensteigung von der Stelle links (also $x_0 - h$) zur Stelle rechts (also $x_0 + h$) zu nehmen:

23

Dies ist noch exakt richtig, wenn die Funktion f eine quadratische Parabel ist. Im Beispiel von eben:

24

Den Fehler dieser Schätzung kann man mit der dritten Ableitung f''' angeben. Er fällt für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h.

Die übliche Schätzung für die *zweite* Ableitung $f''(x_0)$ ist:

25

Das ist noch exakt richtig, wenn die Funktion f eine kubische Parabel ist. Im Beispiel mit der quadratischen Parabel von eben:

26

Den Fehler dieser Schätzung kann man mit der *vierten* Ableitung $f'''' = f^{(4)}$ angeben. Er fällt aber für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h, wie der Fehler der üblichen Schätzung für die erste Ableitung.