Ableitung von Sinus und Cosinus. Additionstheoreme. Sinusschwingungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 7. Dezember 2009, 22:47

1 Ableitung von Sinus und Cosinus

Wenn man es mit der mathematischen Strenge nicht übermäßig genau nimmt, kann man leicht sehen, was die Ableitung der Sinusfunktion und der Cosinusfunktion im Bogenmaß ist – und warum die im Bogenmaß so einfach wird. Dazu betrachtet man Sinus und Cosinus eines Winkels ϕ am Einheitskreis und überlegt sich, wie sich beide ändern, wenn man den Winkel etwas ändert, zu $\phi + \Delta\phi$:

1

Also gilt für Sinus und Cosinus von $\phi + \Delta\phi$:

2

Die Ableitungen $d\sin(\phi)/d\phi$ und $d\cos(\phi)/d\phi$ sagen, mit welcher Geschwindigkeit sich Sinus und Cosinus in Abhängigkeit vom Winkel ϕ ändern. Also gilt offensichtlich:

3

Streng genommen müsste man dies mit einer Grenzwertbetrachtung (kommt nächste Woche) nachweisen. Aber wichtiger ist zunächst, anschaulich zu verstehen, warum das so sein muss. Alternative: Mit Hilfe der komplexen Zahlen kann man die Ableitungen von Sinus und Cosinus in einer einzigen Zeile herleiten.

2 Additionstheoreme

Die Additionstheoreme (genauer: die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, denn es gibt auch andere) sind zwei monströse Ausdrücke für den Sinus und den Cosinus der Summe zweier Winkel:

4

Schulmäßig benutzt man eine sehr komplizierte geometrische Konstruktion, um das zu zeigen. Mit Hilfe der komplexen Zahlen kann man die Additionstheoreme dagegen in einer einzigen Zeile herleiten. Als weitere Alternative kommt hier und heute eine Herleitung auf Basis von Differentialgleichungen – zur Veranschaulichung, wozu Ableitungen auch noch gut sind.

Betrachten wir die Funktion $f: x \mapsto \sin(42+x)$. Zu zeigen ist:

5

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

6

Dies wird später heißen: „f erfüllt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen.“

Diese drei Eigenschaften legen die Funktion f eindeutig fest. Das ist analog zur Mechanik in der Physik: Man kenn Startposition, Startgeschwindigkeit und die Abhängigkeit der Kraft von der Auslenkung, wie beim idealen Modell des Federpendels:

7

Dann ist die Bewegung des Federpendels für alle Zeiten festgelegt – sowohl in die Zukunft wie zurück in die Vergangenheit.

Wenn man also eine andere Funktion hat, die diese drei Eigenschaften erfüllt, muss diese Funktion gleich f sein. Probieren wir die Funktion g, die so definiert ist:

8

g erfüllt die drei Eigenschaften:

9

Damit ist – sogar streng mathematisch – bewiesen, dass $f = g$, also das erste Additionstheorem für $\alpha = 42$ und jedes β. Die Begründung gilt natürlich auch für andere Zahlen als 42, so dass das erste Additionstheorem komplett bewiesen ist.

Das zweite Additionstheorem kann man nun noch billiger zeigen: Wenn $f = g$ gilt, müssen auch die Ableitungen übereinstimmen, also $f' = g'$. Das heißt:

10

3 Sinusförmige Schwingungen

Eine sinusförmige Schwingung [sinusoidal oscillation] ist eine Funktionen des Typs:

11

A ist die Amplitude, f die Frequenz und ϕ die Anfangsphase. Eigentlich haben wir es hier wieder mit einer Komposition von drei Funktionen zu tun:

12

Die drei Parameter A, f, ϕ machen also Folgendes mit dem Graphen:

13

Man beachte die Reihenfolge, in der die Frequenz und die Anfangsphase auf den Graphen wirken. Außerdem interessant: Die Anfangsphase ist in Grad oder im Bogenmaß angegeben, nicht in Sekunden.

Dazu gibt es ein paar Experimente in MATLAB, beginnend mit:

```
t = 0 : 1/44100 : 3;
```

```
x = sin(2*pi*440*t);
wavplay(x, 44100, 'async')
```

4 Schwebung

Eine elementare Anwendung der Additionstheoreme ist die Überlagung von zwei sinusförmigen Wellen fast gleicher Frequenz, am einfachsten mit der derselben Amplitude und mit Anfangsphase null:

14

Führt man die Differenzfrequenz 15 und die mittlere Frequenz 16 ein, kann man die Schwingungen schreiben als:

17

Mit den Additionstheoremen ergibt sich:

18

Im Graph der Summe sieht man damit eine einhüllende Funktion:

19