Eigenschaften von Funktionen. Lineare Funktionen, Potenzen und Wurzeln

Jörn Loviscach

Versionsstand: 9. November 2009, 20:45

1 Eigenschaften von Funktionen

Monotonie:

1

2 Umkehrbarkeit:

3 Symmetrie:

Periodizität:

4

Die Periodenlänge einer periodischen Funktion ist nicht eindeutig bestimmt, wohl aber ihre *kürzestmögliche* Periodenlänge.

2 Lineare Funktionen

Funktionen der Art $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x + 3$ heißen linear. (Im nächsten Semester geht es um lineare Abbildungen statt um lineare Funktionen. Das ist etwas Anderes!) Der Graph einer solchen Funktion ist eine Gerade, allerdings nie eine genau vertikale Gerade. Der Faktor 2 vor dem x im Beispiel gibt die Steigung an; die addierte Konstante 3 den y-Achsenabschnitt:

5

Gibt es sowohl einen x-Achsenabschnitt (genannt a) wie auch einen y-Achsenabschnitt (genannt b) und sind beide nicht null, kann man die lineare Funktion in der Achsenabschnittsform angeben:

6

Dass diese Gleichung richtig ist, kann man so sehen: Sie beschreibt eine Gerade und stimmt für die beiden Schnittpunkte mit den Achsen.

7

Hat man zwei (voneinander verschiedene) Punkte $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ auf der Geraden, kann man die Steigung m ausrechnen:

8

Dann kann die lineare Funktion hinschreiben:

9

3 Potenzfunktionen

Funktionen der Art $x \mapsto x^5$ heißen Potenzfunktionen [power function]. Um den Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}$ wählen zu können, betrachtet man typischerweise zunächst nur Exponenten aus $\mathbb{N}_0$. Sonst gäbe es schon Probleme mit $x = 0$ und/oder mit negativen x. (Warum?)

Der Verlauf dieser Funktionen hängt entscheidend davon ab, ob der Exponent gerade oder ungerade ist:

10

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten wie $x \mapsto x^{-5}$ haben als Definitionsbereich maximal $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Auch der Verlauf dieser Funktionen hängt entscheidend davon ab, ob der Exponent gerade oder ungerade ist:

11

4 Wurzelfunktionen

Funktionen der Art $x \mapsto \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$ heißen Wurzelfunktionen [root function]. Typischerweise betrachtet man dabei nur die Wurzeln $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ usw., nicht etwa $\sqrt[-4{,}23]{}$, um Problemen mit dem Definitionsbereich zu entgehen.

Ungeradzahlige Wurzeln sind die Umkehrfunktionen der entsprechenden Potenzfunktionen. Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x \mapsto x^5$. Dann ist f^{-1} die fünfte Wurzel: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sqrt[5]{x}$.

12

Geradzahlige Wurzeln sind *nicht* die Umkehrfunktionen der entsprechenden Potenzfunktionen. Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x \mapsto x^4$. Diese Funktion ist nicht umkehrbar:

13

Für geradzahlige Wurzeln betrachtet man stattdessen eingeschränkte Potenzfunktionen wie $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $x \mapsto x^4$. Diese Funktion ist umkehrbar; ihre Umkehrung g^{-1} definiert die vierte Wurzel: $g^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $x \mapsto \sqrt[4]{x}$.

14

Geradzahlige Wurzeln liefern also nie negative Ergebnisse!

Achtung: Mit komplexen Zahlen wird sich hier noch Einiges ändern.