Relationen, Umkehrung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 8. November 2009, 17:21

1 Kartesisches Produkt

Für zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt [cartesian product] $A \times B$ definiert als die Menge aller geordneten Paare $(a|b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Beispiel: $\{\circ, \square, \triangle\} \times \{3; 7\} =$

1

„Geordnetes Paar" heißt:

2

Zur Erinnerung, wie es bei Mengen ist:

3

Man kann auch das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bilden. Der klassische Fall davon ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =$

4

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^2$ genannt, sprich „er zwei". Man fasst sie gerne auf als die Menge aller Punkte in der (euklidischen) Ebene:

5

2 Geordnete Tupel

Das kartesische Produkt kann man weiter treiben: Multipliziert man drei Mengen, soll das die Menge aller geordneten Tripel [ordered triples] bedeuten: Der klassische Fall davon ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} =$

6

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^3$ genannt, sprich „er drei“. Man fasst sie gerne auf als die Menge aller Punkte im (euklidischen) Raum:

7

Entsprechend kann man das kartesische Produkt von 4 oder 98 oder $n \in \mathbb{N}^+$ vielen Mengen bilden. Die enthalten dann geordnete Quadrupel, geordnete 98-Tupel beziehungsweise geordnete n-Tupel [ordered n-tuples]. Der Zusatz „geordnet“ wird oft weggelassen.

Die gängigen Programmiersprachen sehen Datentypen für geordnete Tupel vor. Einem geordneten Tripel reeller Zahlen entspricht zum Beispiel in C und C++ das Array `double a[3];` Seine drei Einträge werden mit `a[0]`, `a[1]` und `a[2]` angesprochen. Tupel mit verschiedenartigen Einträgen kann man in C++ als „Strukturen“ bauen wie:

```
struct Einwohner
{
    char name[32];
    int alter;
    char wohnort[32];
};
```

(In C statt C++ sollte das `typedef struct {...} Einwohner;` heißen.)

3 Begriff Relation

Eine beliebige Teilmenge eines kartesischen Produkts von n Mengen heißt n-stellige Relation. Dies hier sind zum Beispiel Relationen:

8

und

9

Was könnte jeweils das kartesische Produkt gewesen sein?

10

und

11

Das zweite Beispiel lässt man die wesentliche Bedeutung von Relationen in der Informatik ahnen: Sie dienen als Datenspeicher.

4 Vorstellungen

Es gibt mehre übliche Vorstellungen von Relationen. Hier sind zwei davon.

Vorstellung 1: Tabelle. Fast alle aktuell (noch?) üblichen Datenbanksysteme verwalten Tabellen. Mathematische Relation sind nichts anderes als Tabellen mit ein paar Besonderheiten. Deshalb heißen diese Datenbanksysteme auch „relational“.

12

In jeder Spalte der Tabelle dürfen nur Einträge aus der jeweiligen Menge des kartesischen Produkts stehen. Die Reihenfolge der Zeilen ist egal. Keine Zeile darf als Ganzes doppelt vorkommen; Teile der Zeile dürfen sich aber wiederholen.

Unterschied zu Abbildungen/Funktionen: Dort gibt es nur zwei Spalten. Außerdem muss in der linken Spalte jedes Elemente der Definitionsmene vorkommen – und das genau einmal.

Vorstellung 2: Geometrische Objekte im $\mathbb{R}^n$:

13

Eine n-stellige Relation zwischen reellen Zahlen ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also eine Menge von Punkten. Umgekehrt ist jedes auch noch so komische geometrische Objekt eine Relation! Insbesondere ist die liegende Parabel $x = y^2$ eine Relation. In Formeln:

14

Im Bild:

15

Unterschied zu Funktionen: Ein Funktionsgraph muss jedem x aus der Definitionsmenge genau ein y (nicht null, nicht zwei) aus dem Wertevorrat zuordnen.

5 Idee der Umkehrabbildung/Umkehrfunktion

Um eine Gleichung wie $a + 3 = 5$ nach a aufzulösen, wendet man (streng genommen) auf beide Seiten eine Abbildung/Funktion an:

16

Ebenso, um $e^b = 7$ nach b aufzulösen:

17

Man sucht also Abbildungen/Funktionen, welche die ursprünglichen Funktionen wieder aufheben – sie umkehren:

18

Stellt man sich eine Abbildung/Funktion als Tabelle vor, ist also eine Tabelle rückwärts gesucht.

6 Definition der Umkehrbarkeit

Hat man eine Abbildung/Funktion $f: D \to W$, dann kann man sich die als Tabelle mit zwei Spalten vorstellen und einfach die beiden Spalten vertauschen, also y aus x machen und umgekehrt. Das ergibt in jedem Fall eine Relation: Die Menge der geordneten Paare ist eine Teilmenge von $W \times D$.

Die große Frage ist nun, ob diese Relation auch eine Abbildung/Funktion ist. Dazu müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

19

Ist beides der Fall, heißt die originale Abbildung/Funktion f „umkehrbar" [invertible]; man kann dann die Tabelle von f rückwärts lesen und erhält wieder eine Abbildung/Funktion: die Umkehrabbildung/Umkehrfunktion [inverse mapping / inverse function] $f^{-1}: W \to D$. Definitionsmenge und Wertevorrat sind gegenüber der Originalfunktion $f: D \to W$ vertauscht.

Achtung: Das $^{-1}$ an dem Namen der Abbildung/Funktion hat nicht (direkt) etwas mit dem Kehrwert zu tun.

7 Kritieren zur Umkehrbarkeit

Die wesentliche Bedingung dafür, dass eine Abbildung/Funktion $f: D \to W$ umkehrbar ist, ist:

20

Streng mathematisch ist ein wenig mehr nötig: Die Bildmenge von f muss den

Wertevorrat W ausschöpfen: 21 . Um diese Bedingung kümmert man sich in der praktischen Ingenieurmathematik wenig. Denn einen solchen Mangel kann man leicht heilen. Beispiel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x \mapsto e^x$.

22

Die meisten umkehrbaren Funktionen, die man in der Praxis sieht, sind streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Diese haben automatisch zu jedem y-Wert nur einen x, denn zu einem größeren x-Werte gehört dann ja zwangsweise ein größerer (bzw. kleinerer) y-Wert:

23

8 Beispiele zur Umkehrbarkeit

Einige Beispiele für umkehrbare und nicht umkehrbare Funktionen:

- $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x \mapsto$ kaufmännische Rundung von x auf eine Stelle nach dem Komma

  24

- $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

  25

- $f_3 : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

26

- $f_4 : [0;\infty) \to [0;\infty)$ mit $x \mapsto x^2$

27

- $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$

28

- $f_6 : [-\pi/2;\pi/2] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$

29

- $f_7 : [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$ mit $x \mapsto \sin(x)$

30

- f_8 = Kehrwert:

31