

Rechnen mit Einheiten und Fehlern

Jörn Loviscach

Versionsstand: 26. Oktober 2009, 19:57

1 Multiplikative Einheiten

Der Grundgedanke beim Rechnen mit Einheiten ist, dass eine physikalische Größe ein Vielfaches einer Grundeinheit ist:

1

Die Einheit wird also wie ein Faktor behandelt – zumindest meist (nachher mehr zu Ausnahmen). Das Nullfache benötigt für die üblichen Einheiten streng genommen keine Einheit:

2

Das Umrechnen von Einheiten passiert typischerweise per Multiplikation:

3

Die typischen Einheiten können problemlos multipliziert und dividiert werden. Ob das physikalisch sinnvoll ist, ist eine andere Frage und hängt vom Zusammenhang ab. Man darf die Produkte und Quotienten zumindest hinschreiben:

4

Demzufolge sind dann auch Potenzen und Wurzeln von Einheiten kein Problem:

5

Addition und Subtraktion gelingen dagegen nur, wenn die Einheiten ineinander umwandelbar sind, so dass man sie ausklammern kann:

6

Viele mathematische Funktionen vertragen aber überhaupt keine Einheiten. In sie darf nur eine nackte Zahl eingesetzt werden. Ist die Zahl aus anderen Werten berechnet, müssen sich deren Einheiten also wegheben:

7

Beim Ableiten df/dx wird die Einheit von f durch die von x geteilt; beim Integrieren $\int f(x)dx$ werden die Einheiten von f und x multipliziert:

8

Nebenbei: Wolfram Alpha kann auch mit Einheiten rechnen: $3\text{km}+4\text{LY}$

2 Nicht-multiplikative Einheiten

Es gibt einige Einheiten, die anders funktionieren. Das erste wichtige Beispiel sind die Temperaturskalen nach Celsius und Fahrenheit: Wenn (wenn!) das multiplikative Einheiten wären, müsste 0°C gleich 0°F sein, so wie $0\text{nm} = 0\text{LJ} = 0$ ist. Es ist aber:

9

Die Nullpunkte liegen also falsch – anders als bei der üblichen physikalischen Kelvin-Temperaturskala. Das führt dazu, dass Vielfache und Potenzen von absoluten Gradangaben in Celsius und Fahrenheit sinnlos sind. Tempera-

turdifferenzen in Grad Celsius oder Fahrenheit sind dagegen multiplikativ verwendbar wie Meter und Sekunden.

Das zweite wichtige Beispiel ist die Pseudoeinheit Dezibel (dB). Sie gibt Leistungsverhältnisse an:

¹⁰

Dezibelwerte zu addieren, heißt, die Verhältnisse zu multiplizieren. Einen Dezibelwert mit einer Zahl zu multiplizieren, heißt, das Leistungsverhältnis zu potenzieren:

¹¹

Einen Dezibelwert mit einem anderen Dezibelwert zu multiplizieren, ist unsinnig.

3 Fehler, Unsicherheit

Beim Messen muss man immer wissen, wie genau ein Messwert ist, wie groß also die Unsicherheit ist, sonst hat man wenig gewonnen:

¹²

Die simpelste Art, die Genauigkeit hinzuschreiben, ist, nur die gültigen = signifikanten Stellen anzugeben, am besten in der naturwissenschaftlichen Exponential Schreibweise:

¹³

Allerdings ist dann nicht wirklich klar, wie groß die Unsicherheit tatsächlich ist:

¹⁴

Man darf nicht zu weit vorne streichen, weil man sonst Rundungsfehler beim Rechnen erzeugt ([Link zu einer ausführlichen Diskussion](#)). In der Physik werden gerne sicherheitshalber zwei Stellen mehr angegeben ([Link zu Naturkonstanten in Wikipedia](#)), zum Beispiel für die Ladung des Elektrons und des Protons $1,602176487(40) \cdot 10^{-19}$ Coulomb, was zu lesen ist:

¹⁵

Selbst dann muss man noch die Bedeutung der Zahl hinter dem \pm klären: Ist das eine typisch zu erwartende Abweichung (zum Beispiel die Standardabweichung, vgl. Vorkurs) oder ist das eine garantierte Schranke? Bei Angaben auf Messgeräten und Bauteilen sollte es letzteres sein: 90 oder 95 oder 99 Prozent (je nach Norm oder Vereinbarung) der Geräte oder Bauteile sollten innerhalb dieses Intervalls liegen.

4 Faustregeln

Warnhinweis: Dies sind wirklich nur Faustregeln. Für belastbare Aussagen muss man die Statistik der Abweichungen kennen.

Beim Addieren und Subtrahieren von unsicheren Zahlenwerten bestimmt die Zahl mit der *absolut* größten Unsicherheit, wie unsicher das Ergebnis wird:

¹⁶

Wenn die absoluten Unsicherheiten beider Zahlenwerte gleich groß sind, kann sich die absolute Unsicherheit des Ergebnisses beim Addieren und Subtrahieren im schlimmsten Fall verdoppeln:

¹⁷

Beim Multiplizieren und Dividieren bestimmt die Zahl mit der *relativ* (also in Prozent) größten Unsicherheit, wie unsicher das Ergebnis wird:

¹⁸

Wenn die relativen Unsicherheiten beider Zahlenwerte gleich groß sind, kann sich die relative Unsicherheit des Ergebnisses beim Addieren und Subtrahieren im schlimmsten Fall verdoppeln:

¹⁹