Zahlenbereiche

Jörn Loviscach

Versionsstand: 19. Oktober 2009, 19:45

1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Zum Zählen benötigt man die positiven natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... Mit Hilfe dieser Zahlen kann man schon die Gleichung $42+x=42$ nicht lösen. Dazu muss die Null eingeführt werden. In der Informatik zählt man die Null gerne zu den natürlichen Zahlen [natural numbers] $\mathbb{N}$, denken Sie zum Beispiel an den Typ `unsigned int` in C. Die Norm DIN 5437 besagt dasselbe. In der Mathematik dagegen gehört die Null auch mal gerne *nicht* zu den natürlichen Zahlen. Ich schreibe deshalb sicherheitshalber $\mathbb{N}_0$ beziehungsweise $\mathbb{N}^+$, um klar zu machen, ob die Null dabei sein soll oder nicht. Vorsicht mit dem nackten Symbol $\mathbb{N}$ in Büchern und Artikeln!

1

Im nächsten Schritt stellt man fest, dass Gleichungen wie $42+x=13$ in $\mathbb{N}_0$ keine Lösung haben. Um alle Gleichungen dieser Art lösen zu können, benötigt man negative ganze Zahlen. Mit der Null und den positiven ganzen Zahlen bilden sie den Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen [integer numbers].

2

Jetzt lässt sich zwar $13 \cdot x = 26$ lösen, aber nicht $13 \cdot x = 27$. Dazu benötigt man Brüche. Alle bisher erwähnten Zahlen zusammen bilden den Bereich der rationalen Zahlen [rational numbers] $\mathbb{Q}$. („Ratio“ heißt nicht nur Verstand, sondern auch Verhältnis. Das „Q“ kommt von „Quotient“.)

3

2 Reelle Zahlen

Um $x^2 = 2$ lösen zu können oder den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 als Zahl ausdrücken zu können, benötigt man einen noch größeren Zahlenbereich: die reellen Zahlen [real numbers]. Messwerte werden typischerweise als reelle

Zahlen aufgefasst.

4

Damit ergibt sich eine Hierarchie an Zahlenbereichen:

5

Ein Klassiker ist, zu zeigen, dass schon $\sqrt{2}$ kein Bruch mehr sein kann, sondern erst in der Menge der reellen Zahlen existiert. Angenommen, $\sqrt{2}$ *wäre* ein Bruch, dann könnte man diesen Bruch weitestmöglich kürzen. Man erhielte einen Zähler $p \in \mathbb{N}^+$ und einen Nenner $q \in \mathbb{N}^+$ mit $\sqrt{2} = p/q$. Durch Quadrieren fände man $2 = p^2/q^2$, also $2q^2 = p^2$. Also müsste p den Primfaktor 2 haben. Dann wäre aber p^2 durch 2^2 teilbar, also müsste auch q den Primfaktor 2 haben. Also wäre nicht weitestmöglich gekürzt worden. Widerspruch.

Eine einfache (wenn auch unelegante) Art, die reellen Zahlen zu konstruieren, ist, die Menge aller Dezimalbrüche zu betrachten, egal ob endlich, periodisch oder (abzählbar) unendlich. Allerdings muss man berücksichtigen, dass viele reelle Zahlen zwei Schreibweisen haben:

6

3 Rechenregeln

In den bisher genannten Zahlenbereichen gelten diese Regeln:

- Assoziativität der Addition:

  7

- Assoziativität der Multiplikation:

  8

- Kommutativität der Addition:

  9

- Kommutativität der Multiplikation:

  10

- Distributivgesetz:

  11

Subtraktion und Division sind dagegen weder assoziativ noch kommutativ!

12

4 Andere Zahlenmengen

Mit der Menge der reellen Zahlen ist man noch nicht am Ende: In der Ingenieurmathematik kommen noch zweidimensionale Zahlen (komplexe Zahlen) und vierdimensionale Zahlen (Quaternionen) hinzu. In der Codierung sind Zahlenbereiche (korrekt: „Körper") wichtig, die nur endlich viele Elemente haben. In der Mathematik untersucht man obendrein Mengen, in denen unendlich große und unendlich kleine Zahlen enthalten sind.

Die ingenieurmäßigen Zahlenbereiche umfassen keine unendlich großen oder unendlich kleinen Zahlen. Die übliche Gleitkommadarstellung am Rechner (IEEE 754) besitzt dagegen drei Sonderfälle:

13

Schaltet man ab, dass solche Rechenergebnisse als Fehler abgefangen werden, wird mit diesen Werten sinnvoll weitergerechnet – allerdings je nach Prozessor deutlich langsamer als mit den üblichen Werten.

5 Intervalle reeller Zahlen

Zusammenhängende Stücke der reellen Zahlen kann man knapper als offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall schreiben. Dabei ist $\pm\infty$ an einem offenen Ende erlaubt:

14

6 Stellenwertsysteme

Zum Aufschreiben von Zahlen hat sich das Dezimalsystem durchgesetzt, ein Stellenwertsystem zur Basis 10:

15

Im Rechner werden Zahlen sinnvollerweise binär dargestellt, also mit der Basis 2:

16

Die Babylonier haben mit der Basis 60 statt mit der Basis 10 gearbeitet. Das merken wir noch heute bei Zeit- und bei Winkelangaben.

Das römische Zahlensystem ist kein Stellenwertsystem, sondern berücksichtigt nur die Position kleinerer Zahlen links:

MCMXV = 17

Mit diesen Zahlen zu rechnen ist ein größere Fleißarbeit.

7 Exponentialschreibweise

Statt eine lange Zahl wie 1234500 aufzuschreiben, kann man auch zur Exponentialschreibweise greifen:

18

Dieser Trick wird vor allem benutzt, um die Genauigkeit einer Zahl verdeutlichen: Man gibt nur die Stellen an, die man sicher weiß („gültige Ziffern“). Wenn man Nullen sicher weiß, werden auch die angegeben, obwohl sie für den Wert scheinbar überflüssig sind:

19

Und noch die Namen einiger Zehnerpotenzen auf Deutsch und Englisch:

20