Mengen, Logik

Jörn Loviscach

Versionsstand: 17. Oktober 2009, 18:11

1 Naive Mengenlehre

Mengen sind die Grundlage fast aller mathematischen Objekte. Ob die Zahl 7, ein Kreis in der Ebene, die Relation „≤“ oder die Sinus-Funktion: Wenn man genauer hinsieht, sind alle diese Objekte als mehr oder minder komplizierte Mengen gebaut.

Eine Menge [set] kann man sich vorstellen wie einen Beutel: Es kommt nur darauf an, welche „Elemente“ drinnen stecken; deren Reihenfolge ist egal. Allerdings darf nichts doppelt drin sein. Jedes Objekt ist also entweder gar nicht oder exakt einmal in einer gegebenen Menge enthalten. Mengen verhalten sich also ganz anders als die geordneten Paare und Tripel, die man von Punktkoordinaten kennt:

1

Für „ist Element von“ und „ist nicht Element von“ schreibt man:

2

Es gibt nur eine Menge ohne Elemente: die leere Menge [empty set]. Sie wird auf zwei Weisen geschrieben:

3

Für die Mächtigkeit, also die Anzahl der Elemente einer Menge schreibt man:

4

Im Falle einer unendlichen Menge – also einer Menge mit unendlich vielen Elementen – ergibt das natürlich keine endliche Zahl, sondern ∞. Dabei gibt es verschiedene Arten von Unendlich, wie Georg Cantor schon 1877 herausgefunden hat; das müssen wir allerdings nicht weiter vertiefen.

2 Mengenrelationen, Mengenoperationen

Zwei Mengen sind gleich, wenn Sie nur gleiche Elemente besitzen. Wenn jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B ist, ist A eine Teilmenge von B und B eine Obermenge von A. Das malt man gerne schematisch als Venn-Diagramm:

5

In Formeln:

6

International bedeutet diese Schreibweise meist, dass auch $A = B$ zulässsig ist (unechte Teilmenge, unechte Obermenge). Schulmäßig schreibt man in Deutschland dafür:

7

Das sieht dann entsprechend aus wie <, >, ≤, ≥ für Zahlen.

Wo es bei den Zahlen die vier Grundrechenarten gibt, hat die Mengenlehre vier grundlegende Mengenoperationen:

- Vereinigung [union], Vereinigungsmenge zweier Mengen: jedes Element jeder der beiden Mengen, aber nur einmal.

  8

- Schnitt [intersection], Schnittmenge zweier Mengen: jedes Element, das in beiden Mengen vorkommt.

  9

- Differenz [difference], Differenzmenge zweier Mengen: jedes Element, das in der ersten Menge vorkommt, aber nicht in der zweiten.

  10

- Komplement [complement], Komplementmenge einer Menge bezüglich einer echten oder unechten Obermenge: nichts anderes als die Differenz aus Obermenge und Menge, nur geschrieben, ohne die Obermenge zu erwähnen (gefährlich!).

11

Entsprechend zu „Punktrechnung vor Strichrechnung“ wird der Schnitt vor der Vereinigung ausgeführt:

12

3 Aussagen, Prädikate, Aussageformen, logische Operatoren

Eine mathematische Aussage [statement, proposition] enthält keine freien Variablen und ist entweder wahr [true] oder falsch [false]. Wenn freie Variablen vorkommen, handelt es streng genommen um ein Prädikat = eine Aussageform (wobei letzterer Begriff aber auch Ausdrücke bezeichnet, in denen Aussagenvariablen vorkommen):

13

Gebundene statt freier Variablen sehen zum Beispiel so aus:

14

Für solche mathematischen Ausdrücke mit einem „Wahrheitswert“ von wahr oder falsch gibt es vier gängige logische Operatoren:

- Verneinung [negation] eines Ausdrucks: genau dann wahr, wenn der falsch ist.

  15

- Und [and] zweier Ausdrücke: genau dann wahr, wenn beide wahr sind.

  16

- Oder (inklusives Oder!) [or] zweier Ausdrücke: genau dann falsch, wenn beide falsch sind.

17

- Exklusives Oder [XOR] zweier Ausdrücke: genau dann wahr, wenn der erste oder der zweite wahr, aber der jeweils andere falsch ist.

18

Entsprechend zu „Punktrechnung vor Strichrechnung“ wird erst die Negation ausgeführt, dann das Und, dann das Oder:

19

In den Programmiersprachen der C-Familie (C++, Java, JavaScript, ActionScript, C# usw.) sieht das so aus:

20

In Schaltplänen benutzt man folgende Symbole – bei uns nach IEC andere als nach ANSI in den USA:

21

4 Logische Folge

Ein logischer Ausdruck q, der mindestens dann wahr ist, wenn ein anderer logischer Ausdruck p wahr ist, ist eine Folge aus dem anderen:

22

Dieser Folge-Pfeil (mit einem oder zwei parallelen Strichen) ist damit für die Logik, was das Kleiner-Zeichen für die Algebra ist. Man liest ihn so:

- aus p folgt q [p implies q],
- wenn p dann q [if p then q],
- p ist hinreichend [sufficient] für q,
- p setzt q voraus [p requires q],
- q (Reihenfolge!) ist notwendig [necessary] für p.

Gilt der Folge-Pfeil in beide Richtungen, sind die logischen Ausdrücke p und q immer nur gleichzeitig wahr oder falsch. Sie heißen dann logisch äquivalent:

23

Dieses Äquivalent-Zeichen (mit einem oder zwei parallelen Strichen) ist damit für die Logik, was das Gleichheitszeichen für die Algebra ist. Man liest es auch:

- p genau dann, wenn q,
- p dann und nur dann, wenn q [p if and only if q, *kurz:* p iff q],
- p ist hinreichend und notwendig für q.

5 Rechenregeln

Zwischen den Mengenoperatoren und den logischen Operatoren bestehen einige Ähnlichkeiten („boolesche Algebra“):

24

Inbesondere ist bei folgenden Operationen die Reihenfolge egal:

25

Elementar wichtig sind die De Morganschen Gesetze der Mengenlehre und der Logik:

26

Statt zur Begründung Venn-Diagramme aufzumalen, kann man auch eine Wahrheitstabelle aufstellen:

27

6 Mengenbildung durch Auswahl

Mengen bildet man oft mit Hilfe von logischen Ausdrücken, zum Beispiel die Menge aller reellen Zahlen zwischen 3 (einschließlich) und 5 (ausschließlich):

28

Oder die obere Hälfte einer Kreisscheibe ohne Rand:

29

Streng genommen muss man immer angeben, aus welcher Grundmenge die Elemente zu nehmen sind:

30

Um komplexe Konstruktionen solcher Art mathematisch wasserdicht zu machen, muss man von der naiven Mengenlehre zur axiomatischen Mengenlehre übergehen. Beispiel: Wenn (wenn!) es eine Menge $\mathscr{A}$ aller Mengen gäbe, könnte (könnte!) man folgende Menge B bilden:

31

Es müsste dann B Element von sich selbst sein und gleichzeitig *nicht* Element von sich selbst sein (Russellsche Antinomie). In der Praxis kommt man aber problemlos mit der schulmäßigen naiven Mengenlehre zurecht.