Grundlagen zu Ableitungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 12. Oktober 2009, 16:09

Dies ist eine Quick&Dirty-Version zu Beginn des Semesters, als Hilfe für die Parallelfächer. Im Detail behandeln wir das später noch einmal.

1 Momentangeschwindigkeit

Man stellt sich einen Zug vor, der vorwärts und rückwärts entlang einer Geraden fahren kann. Entlang dieser Geraden sei ein extrem langes Zentimetermaß platziert, so dass man die aktuelle Position als Länge x angeben kann. Die Fahrten des Zuges lassen sich dann in einem Diagramm auftragen. Die Länge (also der Ort) x ist eine Funktion der Zeit t:

1

Ebenso lässt sich zu jedem Zeitpunkt t die momentane Geschwindigkeit v vom Tacho ablesen und plotten, wie beim Fahrtenschreiber. Achtung: In der Physik zeigt der Tacho beim Rückwärtsfahren eine negative Geschwindigkeit:

2

Die Momentangeschwindigkeit zum Beispiel bei $t = 10\,\mathrm{s}$ lässt sich bestimmen, wenn man die Positionen für eine kleine Weile vorher und nacher kennt. Man kann die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ dann nämlich beliebig genau nähern:

3

2 Ableitung

Dieser Übergang von der Funktion $t \mapsto x(t)$ zur Funktion $t \mapsto v(t)$ heißt „nach t ableiten“ oder „nach t differenzieren“ [to differentiate with respect to t]. Die Funktion $t \mapsto v(t)$ heißt Ableitung [derivative] der Funktion $t \mapsto x(t)$. Man schreibt 4 (gesprochen: „deh icks nach deh teh“) oder in der Physik für solche Ableitungen nach der Zeit: 5 . In der Mathematik heißt die unabhängige Variable gerne x. Die Ableitung einer Funktion $x \mapsto f(x)$ heißt dann 6 oder kurz 7 , gesprochen: „eff strich“ [“f prime”]. Schulmäßig definiert man die Ableitung analog zur Momentangeschwindigkeit:

8

3 Lineare Näherung

Wenn man mit der Momentangeschwindigkeit $10\,\mathrm{m/s}$ fährt, legt man in der nächsten Sekunde etwa $10\,\mathrm{m}$ zurück, in der nächste Millisekunde etwa $10\,\mathrm{mm}$ usw. Ausgehend vom Zeitpunkt t hat man nach der Zeit h also etwa die Position 9 erreicht. Diese lineare (!) Näherung stimmt um so besser, je dichter h an null ist.

Schreibt man denselben Gedanken für eine Funktion $x \mapsto f(x)$ hin, erhält man die Gleichung der Tangentengerade an der Stelle x. Die Wert der Ableitung $f'(x)$ wird dann die Steigung der Tangentengeraden an f an der Stelle x:

10

4 Ableitungsregeln

Ableitungen der üblichen Funktionen und beliebiger Zusammensetzungen davon lassen sich nach Rezept ausrechnen. Das ist intellektuell nicht sehr anspruchsvoll; Wolfram Alpha kann einem diese Aufgabe abnehmen: `derivative x^(sin(x)*sqrt(x))`. Mit „Show steps“ zeigt es einem auch, welche Regeln es wie angewendet hat.[c1]

[c1] *text added by jl*

Wichtig: Die Regeln in komplizierten Ausdrücken immer von außen nach innen anwenden: auf einen großen Bruch erst die Quotientenregel anwenden, dann mit Zähler und Nenner weitermachen usw.

4.1 Faktorregel

Das a-fache (a: eine konstante Zahl) einer Funktion f hat die a-fache Ableitung: [11] Idee zur Herleitung: den Faktor aus dem Bruch in der schulmäßigen Definition der Ableitung ziehen.

4.2 Summenregel

Leitet man die Summe $x \mapsto f(x)+g(x)$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich die Summe der Ableitungen: [12] Idee zur Herleitung: den Bruch in der schulmäßigen Definition der Ableitung in zwei Brüche zerteilen.

4.3 Produktregel

Leitet man das Produkt $x \mapsto f(x)g(x)$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich eine Summe, in dem jeweils eine der Funktionen abgeleitet ist: [13] Idee zur Herleitung: lineare Näherung für f und g einsetzen und daraus die lineare Näherung für das Produkt gewinnen.

4.4 Kettenregel

Leitet man die Verkettung $x \mapsto f(g(x))$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich ein Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer Funktion: [14]

Idee zur Herleitung: lineare Näherung für f und g einsetzen und daraus die lineare Näherung für die Verkettung gewinnen.

4.5 Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} ist der Kehrwert der Ableitung der originalen Funktion f, allerdings an der passenden Stelle: [15] Idee zur Herleitung: Kettenregel für $x \mapsto x = f(f^{-1}(x))$.

4.6 Potenz- und Wurzelfunktionen

Funktionen der Art $x \mapsto x^n$ mit einer konstanten Zahl n werden abgeleitet, indem man einen Faktor n nach vorne holt und den Exponenten n dann um 1 verringert: [16] Insbesondere ist die Ableitung einer konstanten Funktionen ($n = 0$) null und die Ableitung von $x \mapsto 1/x$ ist[c1] [17]. Idee zur Herleitung: für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die lineare Näherung mit Hilfe der Binomischen Formeln finden, für alle anderen n geht man wohl am einfachsten über die Exponentialfunktion.

[c1] jl: hat die Ableitung

4.7 Quotientenregel

Leitet man den Quotienten $x \mapsto f(x)/g(x)$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich: [18] Idee zur Herleitung: $f(x)/g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, also Produkt- und Kettenregel anwenden.

4.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Die natürliche Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist ihre eigene Ableitung: [19]. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist der Kehrwert: [20]. Idee zur Herleitung: e^{x+h} mit Hilfe der Potenzrechengesetze umformen und so die lineare Näherung finden; der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

4.9 Sinus und Freunde

Im Bogenmaß (!) ist die Ableitung des Sinus der Cosinus: [21] Idee zur Herleitung: lineare Näherung mit Hilfe des Additionstheorems und eine geometrischen Näherung des Sinus für Winkel nahe 0. Die Ableitungen von Cosinus, Tangens usw. und der Arcusfunktionen ergeben sich dann über Symmetrie, Quotientenregel und der Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion.