Überblick

Jörn Loviscach

Versionsstand: 4. Oktober 2009, 14:35

1 Drei Arten Mathematik

Man kann grob drei Arten von Mathematik unterscheiden:

- **Schulmathematik**, die wohl oft aus dem Auswendiglernen von Formeln, dem Einsetzen von Zahlenwerten und dem Eintippen in einen Taschenrechner besteht,
- **Mathematik als Wissenschaft für sich**, wie sie in einem Universitätsstudiengang Mathematik gelehrt wird. Man baut mehr oder minder interessante mathematische Objekte und leitet Sätze darüber her, nach dem Muster: Definition, Satz, Beweis, hin und wieder mit einem Lemma (Hilfssatz) oder einem Korollar (einfache Folgerung) zwischendurch (Beispiel),
- **Ingenieurmathematik** oder **Angewandte Mathematik**, die darin besteht, mathematische Modelle zu finden und auszuwerten – in der Physik und der Elektrotechnik ebenso wie in der Biologie, Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften.

2 Modell und Wirklichkeit

Mathematik sagt nicht, was die Welt ist. Mathematik ist nur ein Baukasten, um die Welt zu modellieren – und damit zum Beispiel vorherzusagen, welchen Wirkungsgrad ein Solarmodul hat oder wie dünn das Eis der Arktis im nächsten Sommer ist. Die Natur- und Technikwissenschaften benutzen die Mathematik, um immer genauere Modelle zu formulieren. Kaum jemand hofft noch, dabei eine endgültige „Wahrheit“ zu finden. Vielmehr scheint der Prozess endlos.

Beispiel 1: Atome von Demokrit ⟶ Bohrsches Atommodell ⟶ Orbitalmodell ⟶ Atomkern aus Protonen und Neutronen ⟶ Quarks und Gluonen ⟶ Superstrings?

Beispiel 2: Aristotelisches Weltbild ⟶ Ptolemäus’ exzentrische Epizykel ⟶ Kopernikanisches Weltbild ⟶ Kepler-Ellipsen ⟶ Periheldrehung nach Einstein; Bewegung der Sonne in der Milchstraße; Expansion des Universums; dunkle Materie?

Die Naturwissenschaften können nicht wirklich sagen, was etwas *ist* oder wie es *funktioniert*. Sie geben nur mehr oder minder hilfreiche Modelle: „Theorien“.

Insofern gibt es in den Naturwissenschaften streng genommen auch keine Beweise, anders als in der Mathematik. (Kann man einen Gegenstand auf eine Geschwindigkeit schneller als das Licht beschleunigen? Nach der speziellen Relativitätstheorie keinesfalls, mit einer eigenwilligen Krümmung der Raumzeit vielleicht doch.) Allerdings verlangt man von naturwissenschaftlichen Theorien, dass sie *widerlegt* werden können. „Mein Freund Harvey“ ist keine naturwissenschaftliche Theorie.

Wir schreiben zwar Sätze wie: „Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Sonne.“ Eigentlich ist aber etwas gemeint wie: „Wenn man so rechnet, als ob sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt, kann man den Sonnenstand hinreichend genau vorhersagen, um eine Solaranlage zu planen, denn die Schwankungen im Lichteinfall zum Beispiel durch die wechselnde Bewölkung sind so stark, dass der Sonnenstand nicht sehr genau bekannt sein muss.“

Mathematik ist nie die Wirklichkeit (was auch immer man darunter versteht), sondern ein Mittel, Beobachtungen zu Modellen zu verdichten und dann daraus Vorhersagen zu gewinnen, insbesondere durch Simulationen:

Für diesen Prozess der Abstraktion und Vorhersage gibt es nicht die eine richtige Lösung, sondern nur mehr oder minder brauchbare Lösungen. Eine wesentliche Kunst in den Ingenieurwissenschaften besteht darin, mathematische Modelle zu finden, die genau genug sind – aber nicht übertrieben genau und detailliert, denn dann sind sie praktisch unbrauchbar. Beispiel: Niemand modelliert das Verhalten einer Photovoltaikanlage als Effekt von Quadrilliarden einzelner Atome.

Die Ingenieurmathematik stellt einen Werkzeugkasten zum Modellieren bereit. Funktionen, Ableitungen und Integrale haben sich über Jahrhunderte als extrem hilfreich herausgestellt, um die Natur zu beschreiben und um Maschinen zu konstruieren.

3 Mythen über Mathematik

Leider haben sich viele falsche Vorstellungen festgesetzt, was Mathematik ist und wie sie funktioniert.

3.1 „Mathematik ist Rechnen."

Man könnte im Gegenteil sagen, dass Mathematik größtenteils im *Vermeiden* von Rechnen besteht. So wurden Logarithmen erfunden, um aufwendige Multiplikationen durch einfache Additionen zu ersetzen. Und die numerische Mathematik sucht effiziente Rechenverfahren, mit denen sich noch mehr Daten in noch kürzerer Zeit verarbeiten lassen. Ein Großteil der modernen Mathematik hat gar nichts mehr mit reinen Zahlen zu tun. Das gilt zum Beispiel für Mengenlehre und Topologie.

3.2 „Es gibt immer nur eine Lösung."

Die eigentliche Aufgabe in der Ingenieurmathematik besteht darin, mathematische Modelle für die Wirklichkeit (was auch immer das ist, siehe vorne) zu finden. Von solchen Modellen gibt es mehr oder minder geeignete, aber kein einzig richtiges.

3.3 „Es muss immer eine Zahl herauskommen."

Um zum Beispiel ein Steuerungssystem zu programmieren, benötigt man einen Algorithmus, keine Zahl. Geometrische Konstruktionen liefern vielleicht Geraden oder Kreise.

3.4 „Mathematik ist unkreativ."

Ein Modell zu finden, das erstens hinreichend genau ist und zweitens effizient auswertbar ist, ist keine geradlinige Aufgabe, sondern verlangt oft Tricks und Kniffe. Im Idealfall hat man ein „elegantes" Modell.

3.5 „Man muss sich hinsetzen und Mathematik lernen."

Mit Pauken kommt man allenfalls in der Schulmathematik weiter. Außerhalb der Schulmathematik hilft nur Verstehen. Dazu muss man Mathematik anwenden: konkrete Probleme bearbeiten. Und das kostet Zeit. Die meisten sinnvollen Probleme lassen sich nicht auf Anhieb lösen, sondern verlangen einiges an Nachdenken und Versuchen mit verschiedenen Ansätzen. Um so schöner ist es, ein Problem dann tatsächlich geknackt zu haben.

Es geht um das Warum, nicht nur um das Wie.

4 Dieses Semester

Das erste Semester frischt die Schulmathematik auf und vertieft sie mit komplexeren Anwendungen. Die behandelten mathematischen Konstruktionen können aber größtenteils schon aus der Schule bekannt sein.

4.1 Numerik

Ein wesentlicher Aspekt jedes Werkzeugs der Ingenieurmathematik ist immer die Numerik – die Wissenschaft, mit vertretbarem Rechenaufwand tatsächlich etwas in der benötigten Genauigkeit auszurechnen. Man erlaubt Abweichungen vom exakten Resultat, um *überhaupt* ein Resultat zu erhalten!

Beispiel:

2

Die Numerik behandele ich zusammen mit den jeweiligen mathematischen Konstruktionen, nicht als getrenntes Gebiet.

4.2 Logik und Mengen

Mengen und logische Operationen sind die Bauklötze der heutigen Mathematik. Ein Dreieck wird eine Menge

3

,

ebenso wie eine Tabelle eine Menge wird:

4

.

In Logikschaltungen und in der Informatik kommen die logischen Operationen ebenso vor.

4.3 Zahlen

Die schulmäßigen Zahlenbereiche (natürliche Zahlen, ..., reelle Zahlen) sollten keine große Neuigkeit mehr sein. Zum raffinierten Arbeiten mit Schwingungen kommen im nächsten Semester noch die komplexe Zahlen hinzu.

4.4 Kombinatorik

Die Kombinatorik befasst sich mit dem Abzählen von Mengen. Das klassische Beispiel ist die Zahl der möglichen Lotto-Sechser:

5

.

Überraschenderweise kommt der gleiche Ausdruck vor, wenn man 6 ausmultipliziert: Auch die binomischen Formeln sind Teil der Kombinatorik.

4.5 Abbildungen/Funktionen

Abbildungen (oder Funktionen) sind das wesentliche Werkzeug beim Modellieren von Systemen. Eine Abbildung nimmt Zahlenwerte oder geometrische Gebilde oder Tabellen oder ... entgegen und produziert daraus Ergebnisse. Die Normalparabel zählt dazu:

7

,

aber ebenso auch der Flächeninhalt:

8

.

4.6 Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Polynome, gebrochenrationale Funktionen, Sinus und Freunde

Die üblichen Verdächtigen, siehe Vorkurs.

4.7 Ableitung und Integral

Die Ableitung sagt, wie sich eine Größe verändert, wenn sich eine andere ein winziges Bisschen ändert. Ableitungen kommen in der Physik, der Elektrotechnik, der Regelungstechnik ebenso vor wie in wirtschaftswissenschaftlichen Modellen:

9

Integrale sind zunächst dazu da, Flächen zu berechnen:

10

Es stellt sich aber heraus, dass die Integration das Ableiten rückgängig macht. Damit ist die Integration wichtig, um von Ableitungen auf die originalen Funktionen zu schließen.

Die Grundlagen von Ableitung und Integral bringe ich bereits vorab in den ersten Wochen, weil sie in den parallelen Veranstaltungen benötigt werden.

4.8 Zufall

Für praktisch alle Phänomene lässt sich keine exakte Vorhersage treffen: Der Widerstand, den man in einer Schaltung verbaut, hat vielleicht 5 % Toleranz, die Wettervorhersage für morgen – interessant für Wind- und Solarstrom – hat eine noch viel größere Fehlermarge. Wie rechnet man mit solchen Unsicherheiten? Die Stochastik ist die Warscheinlichkeitsrechnung; die (mathematische) Statistik befasst sich damit, wie man Wahrscheinlichkeiten per Experiment bestimmt.

5 Software

In der Veranstaltung führe ich immer wieder den Umgang mit üblicher Software vor:

- **Tabellenkalkulationen** wie OpenOffice.org Calc und Microsoft Excel helfen, überschaubare Datenmengen einfachen Operationen zu unterziehen und das Ergebnis für Druck oder Internet aufzubereiten.

- **Numerik-Software** wie Matlab oder die damit in den Grundlagen kompatible Open-Source-Software Octave (Link zu einer Linux- und Windows-Version mit grafischer Oberfläche) verarbeitet auch große Datenmengen, ist umfassend mit mathematischen Funktionen ausgestattet und leicht zu programmieren.

- **Computeralgebra-Systeme** wie Wolfram Mathematica – im Web gratis als Teil von Wolfram Alpha zu haben – verstehen sich auf das Rechnen mit Symbolen, zum Beispiel bei Gleichungen, Gleichungssystemen, Ableitungen und Integralen. Wenn diese Systeme nicht mehr mit exakten Umformungen weiterkommen, schalten sie meist auf eine numerische Auswertung um, so dass man trotzdem ein Resultat erhält.

- **Textsatzsysteme** helfen damit, druckreife Dokumente mit komplexen mathematischen Formeln, automatischen Querverweisen und Verzeichnissen – insbesondere Literaturangaben – zu erzeugen. Der wesentliche Vertreter dieser Softwaregattung ist TeX. Es ist für praktisch alle Computerplattformen als Open Source verfügbar. Das gängige Gespann für Windows ist MikTeX mit dem Editor TeXnicCenter.