Reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. Juni 2009, 21:08

1 Beispiele

Die übliche Vorstellung, die man mit einer Funktion mehrerer Veränderlicher [multivariate function] verbindet, ist die einer Landkarte [map]: Ein Punkt darauf ist definiert durch die zwei Unabhängigen geografische Breite [latitude, *nicht* width] und Länge [longitude, *nicht* length]. Jedem Punkt ordnet die Landkarte per Farbe eine Höhe zu (topografische Karte):

1

Wenn in der Karte per Farbe nicht die Höhe markiert ist, sondern die Zugehörigkeit zu den Staaten (politische Karte), spricht man oft nicht von einer Funktion, sondern nur allgemein von einer Abbildung, weil der Wertebereich keine Zahlenmenge ist. (Sondern was ist?)

Statt der Höhe kann man natürlich auch andere Größen eintragen, zum Beispiel die Sonneneinstrahlung (Link). Umgekehrt kann man jedes Bild mathematisch als eine Funktion zweier Veränderlicher auffassen oder Funktionen zweier Unbekannter nicht nur als Bilder darstellen, sondern als Gebirge. Beipiel: pVT-Diagramm (Link). Technisch tauchen Funktionen mehrerer Unabhängiger gerne als Kennlinienfeld [family of characteristics] auf, etwa bei der Abhängigkeit des Stroms durch eine Solarzelle in Abhängigkeit von Spannung und Temperatur (Link).

Im elementaren Werkzeugkasten der Mathematik gibt es überraschend viele Funktionen mehrerer Veränderlicher, wenn man nur mal genau hinsieht:

2

2 Formales

Eine Funktion f von n Veränderlichen ordnet jedem Punkt $\mathbf{x}$ aus einem Definitionsbereich [domain] $D \subseteq \mathbb{R}^n$ genau einen Wert $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ zu. Die Menge der tatsächlich dabei vorkommenden Werte $f(\mathbf{x})$ heißt Bild [image] der Funktion f, kurz $f(D)$, oder (missverständlich) Wertebereich der Funktion f. (Es gibt in der Literatur eine Verwirrung der Begriffe Wertebereich und Wertevorrat [*beides:* range]. Eindeutig ist, vom „Bild“ zu reden und die Menge der hypothetisch möglichen Werte als Zielmenge [codomain] zu bezeichnen.)

Grafisch:

3

3 Darstellungsverfahren

Gebirge = perspektivische 3D-Darstellung. Nur für Funktionen zweier Veränderlicher. Schlecht abzulesen.

Topografische Karte mit Farbcodierung. Nur für Funktionen zweier Veränderlicher. Schlecht abzulesen, selbst wenn anders derzeit in als Wolfram Alpha (`plot x^2+y^2`) eine Legende dabei ist.

Topografische Karte mit Höhenlinien = Isolinien = Äquipoten{t|z}iallinien. Nur für Funktionen zweier Veränderlicher. Besser abzulesen als Farbcodierung – wenn die Höhenlinien beschriftet sind, anders als derzeit in Wolfram Alpha. Höhenlinien und 3D zusammen in Octave:

```
x = [-3 : .1 : 3];
y = [-3 : .1 : 3];
[xx, yy] = meshgrid(x, y);
z = xx.^2.+yy.^2;
meshc(x, y, z)
colorbar
```

Kennlinienfelder. Gehen prinzipiell auch für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen. Relativ exakt ablesbar. In Octave kann man nach dem vorigen Code schreiben, um jeden y-Wert als einzelne Kurve zu sehen: `plot(x, z)`