Fourier-Transformation

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. Juni 2009, 19:58

1 Idee

Die Fourier-Reihe setzt periodische Funktionen aus Gleichspannung, Grundwelle und Oberwellen zusammen. Aber was ist mit nicht-periodischen Funktionen? Es stellt sich heraus, dass man die bilden kann, wenn man beliebige Frequenzen zulässt, nicht nur ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz.

Das kann man als Grenzwert einer Fourier-Reihe mit immer größerer Periode T verstehen. Sei f dazu eine nichtperiodische Funktion, die zum Beispiel stetig differenzierbar ist, um technische Probleme in Weiteren zu vermeiden. Wenn man die komplexe Fourier-Reihe so bildet:

1

erhält man eine Funktion mit Periode T. Diese Funktion stimmt für $-T/2 < t < T/2$ mit f überein. (An $t = \pm T/2$ tut sie das wahrscheinlich schon nicht mehr, wegen des da zu erwartenden Sprungs, der von der Fourier-Reihe auf halber Höhe gefüllt wird.)

Wählt man nun die Periode T größer und größer, passt die Fourier-Reihe schließlich für jedes noch so große und noch so kleine t. Die Hoffnung ist, dass auch[c1] die Einzelteile der Fourier-Reihe für $T \to \infty$ zu etwas Sinnvollem konvergieren. Um das zu sehen, schreibt man nun die Kreisfrequenz ω statt $2\pi n/T$. Sie läuft in Schritten der Größe $\Delta\omega = 2\pi/T$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Also:

[c1] *text added by jl*

2

Wir untersuchen $T \to \infty$, also $\Delta\omega \to 0$.[c2] Das Integral geht gegen

[c2] *text added by jl*

3

– zumindest, wenn die Funktion f so schnell abklingt, dass

4

. Die Summe[c3] wird im Grenzwert ein Integral:

[c3]jl: In der Summe schreibt man ω statt $2\pi n/T$. Diese Kreisfreq ω läuft in immer kleineren S ten von $2\pi/T$ in Richtung $+\infty$ u Richtung $-\infty$. Sie

5

Diese Gleichung ist der Schlüssel zur Fourier-Transformation [Fourier transform].

2 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion f (zu Einschränkungen siehe den vorigen Abschnitt) wird definiert als:

6

Gegeben $\hat{f}$, kann man die Funktion f wieder zurückerhalten (inverse Fourier-Transformation):

7

Das folgt aus der im vorigen Abschnitt gefundenen Gleichung. Vorsicht mit der Literatur: Der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ wird nicht von allen Autoren per Quadratwurzel zu gleichen Teilen in die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation eingebaut. Dann tauchen hier und da andere Vorfaktoren 2π auf. Und statt $\hat{f}$ mit Hut sieht man auch $\tilde{f}$ mit Tilde.

Anders als die Fourier-Reihe schreibt man die Fourier-Transformation nur selten mit Sinus und Cosinus hin.

Die Fourier-Transformation nimmt ein Signal in Zeitdarstellung und wandelt es in eine Spektraldarstellung = Frequenzdarstellung um (Fourier-Analyse). Die inverse Fourier-Transformation macht das Umgekehrte (Fourier-Synthese). Anders als bei der Fourier-Reihe sehen hier Analyse und Synthese gleichartig aus.

Achtung: Was ein Echtzeit-Spectrum-Analyzer zeigt, ist *nicht* die Fourier-Transformation, sondern immer nur die Fourier-Reihe eines kurzen Ausschnitts des Signals, praktisch immer per FFT berechnet.

3 Parseval-Gleichung und Faltungssatz

Man kann die Fourier-Transformation als eine Abbildung von Funktionen auf Funktionen auffassen. Eine herkömmliche Funktion nimmt eine Zahl und liefert eine Zahl zurück. Die Fourier-Transformation nimmt eine Funktion und liefert eine Funktion zurück. (Was wäre eine andere mathematische Operation dieser Art?) Summen von Funktionen bzw. konstante Vielfache von Funktionen werden dabei wieder zu den Summen bzw. Vielfachen der Fourier-Transformierten. Die Fourier-Transformation verhält sich also abstrakt wie eine Matrix („lineare Abbildung“).

Die Analogie kann man sogar noch weiter treiben: Die Fourier-Transformation kann man als Drehung um $90°$ in einem unendlichdimensionalen Raum beschreiben, die inverse Fourier-Transformation als Drehung um $-90°$. Alle anderen Winkel gehen auch, mit einer etwas komplizierteren, aber selten benutzten Transformation (Fractional Fourier transform).

Dass sich die Fourier-Transformation wie eine Drehung verhält, schlägt sich in zwei wichtigen Gleichungen nieder.

Erstens ist das die Parseval-Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega = \boxed{{}^{8}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Die Norm einer Funktion (verwandt mit dem RMS-Wert!) bleibt also erhalten, wenn man die Fourier-Transformation bildet. Analogie: Die Länge eines Vektors bleibt bei Anwendung einer Drehungsmatrix erhalten. Praktisch bedeutet dies, dass man die physikalische Arbeit sowohl in der Zeit- wie in der Frequenzdarstellung durch das quadratische Integral bestimmen kann.

Zweitens gilt der Faltungssatz [convolution theorem]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s-t) g(t) \, dt = \boxed{{}^{9}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Dies ist beim Lösen von Differentialgleichungen mittels Impulsantworten hilfreich.