Konvergenzradius

Jörn Loviscach

Versionsstand: 6. Juni 2009, 21:39

1 Zwei Fragen

Die Entwicklung einer Funktion f an einer Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe war:

1

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Ergibt diese unendliche lange Summe (Fachbegriff: „Reihe“) Sinn?

2. Falls die Reihe Sinn ergibt: Kommt aus ihr wieder die Funktion f heraus?

2 Konvergenz von Potenzreihen

Zur ersten Frage: Die Taylor-Reihe ist eine spezielle Art, eine Potenzreihe zu bilden. Um die erste Frage zu beantworten, kann man einfacher eine allgemeine Potenzreihe untersuchen:

2

Dabei sind die $a_0, a_1, \ldots$ feste Zahlen.

Was soll diese unendlich lange Summe mathematisch bedeuten?

3

Wenn dieser Grenzwert für ein gegebenes x existiert, sagt man, diese Reihe konvergiert für dieses x. Die große Frage ist, für welche x das der Fall ist.

Anschaulich ist klar, dass die Potenzreihe um so mehr zur Explosion neigt, je größer $|x-x_0|$ wird. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius r, so dass die Reihe für $|x-x_0|<r$ konvergiert und für $|x-x_0|>r$ divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für $|x-x_0|=r$ kann sie konvergieren oder divergieren, je nach x.

Im Fall $r = \infty$ hat man immer Konvergenz, so wie bei den Funktionen exp, sin und cos. Im Fall $r = 0$ kann man nur $x = x_0$ einsetzen, was nicht sehr spannend ist.

Der Begriff Konvergenz*radius* lässt an eine Kreisscheibe denken – und genau darum geht es: Setzt man Zahlen $x \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe ein, ist das Verhalten so:

4

Warum?

Angenommen, x liegt so dicht bei x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \le 0{,}999$ für alle n gilt. Dann kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe nach oben abschätzen:

5

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell schrumpfenden Abständen:

6

Die Reihe wird in diesem Fall also konvergieren.

Angenommen dagegen, x liegt so fern von x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \ge 1{,}001$ für alle n gilt. Dann kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe *nach unten* abschätzen:

7

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell *wachsenden* Abständen:

8

Die Reihe wird in diesem Fall also *divergieren*.

Wesentlich ist also, ob $\sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0|$ größer oder kleiner ist als eins. Im Allgemeinen ist $\sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0|$ allerdings nicht *durchgängig* größer oder kleiner als 1, was die Sache kompliziert macht. Die Frage ist, wie groß dieser Ausdruck schlimmstenfalls wird – und das für $n \to \infty$, denn endlich viele Ausreißer schaden der Konvergenz nichts. Dazu braucht man den „Limes superior" $\limsup_{n\to\infty}$, das ist der höchste Häufungspunkt einer Folge – oder ∞, falls es keinen höchsten Häufungspunkt gibt.

Nach einigem Überlegen (hier nicht vorgeführt) findet man als Kriterium für Konvergenz:

9

Und für Divergenz:

10

Wenn man also definiert:

$r =$ 11 ,

wobei $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$ gerechnet wird. Damit hat man Konvergenz, wenn $|x-x_0| < r$, und Divergenz, wenn $|x-x_0| > r$. Dieses r heißt Konverganzradius.

3 Analytische Funktionen

Nun zum zweiten Problem: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für ein gegebenes x. Ist das Ergebnis dann wieder $f(x)$?

Funktionen f, die das erfüllen, heißen analytisch. (Man kann zeigen, dass diese Funktionen genau diejenigen sind, von denen man einen komplexen Differentialquotienten bilden kann.) Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein. Will sagen: Nicht jede konvergente Taylor-Reihe summiert sich wieder zu der zugrundeliegenden Funktion f.

Die Ausnahmen sind allerdings exotisch. Hier ist ein Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ wenn } x \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schmiegt sich bei $x = 0$ extrem stark an die x-Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Die Taylor-Reihe dieser Funktion f für $x_0 = 0$ ist deshalb für alle x gleich null – also nicht gleich f.