Homogene lineare DGL-Systeme erster Ordnung[c1] mit konstanten Koeffizienten

[c1] *text added by jl*

Jörn Loviscach

Versionsstand: 25. Mai 2009, 18:05

1 DGLn und Eigenwerte

Homogene lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung[c2] mit konstanten Koeffizienten wie

[c2] *text added by jl*

$$\begin{cases} \dot{x} \overset{!}{=} 10x - 5y \\ \dot{y} \overset{!}{=} 6x - y \end{cases}$$

helfen zu verstehen, wie sich nichtlineare Systeme in der Umgebung eines Gleichgewichtpunkts verhalten: Ist das Gleichgewicht stabil oder instabil? Laufen Lösungen spiralig zum Fixpunkt hin? Wie schnell? Und wie schnell oszillieren sie dabei? Um diese Fragen zu lösen, bildet man eine mehrdimensionale lineare Näherung an das nichtlineare System. Mehr zu solchen Näherungen folgt beim Thema „Funktionen mehrere Unabhängiger".

Das Differentialgleichungssystem lässt sich als Vektor-Differentialgleichung schreiben:

1

Diese Matrix hat den Eigenwert 4 zum Beispiel mit dem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und den Eigenwert 5 zum Beispiel mit dem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese werden wie üblich bestimmt. Damit kann man sofort zwei Lösungen der Differentialgleichung hinschreiben:

2

Als allgemeine Lösung der DGL ergibt sich:

3

.

Wenn man in n Dimensionen n verschiedene Eigenwerte hat, erhält man entsprechend eine allgemeine Lösung mit n Integrationskonstanten. Schwieriger kann es werden, wenn weniger als n verschiedene (ggf. komplexe!) Eigenwerte vorhanden sind. Dann kommen gegebenenfalls Faktoren t, t^2, t^3 und so weiter dazu. Diesen Fall betrachten wir hier nicht im Detail.

Die ggf. komplexen Eigenwerte der Matrix bestimmen die Stabilität: Nur wenn die Realteile aller dieser Eigenwerte negativ sind, läuft jede Lösung zum Ursprung hin. Wenn auch nur der Realteil eines der Eigenwerte gleich null oder sogar positiv ist, laufen die meisten Lösungen nicht mehr zum Ursprung hin.

2 Zusammenhang mit DGLn höherer Ordnung

Gegeben sei die homogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $\ddot{x}+\dot{x}-6x \overset{!}{=} 0$[c1] mit $x(0) \overset{!}{=} 7$ und $\dot{x}(0) \overset{!}{=} 3$. Typischerweise wird man die mit folgendem Ansatz lösen:

c1 jl: $\ddot{x}+\dot{x}-6 \overset{!}{=} 0$

4

Jetzt lässt sich dies aber alternativ auch als Eigenwertbestimmung verstehen: Man untersucht eine DGL *erster* Ordnung in *zwei* Dimensionen:

5

und sucht dazu die Eigenwerte der Matrix, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

6

Das Ergebnis wird das Gleiche sein.

3 Exponentialfunktion für Matrizen

Erinnerung an das Eindimensionale: Die Differentialgleichung

$$\dot{x} \stackrel{!}{=} 5x \quad \text{mit} \quad x(0) \stackrel{!}{=} 7$$

hat die Lösung:

7

Im n-Dimensionalen haben wir statt der Zahl (hier 5) eine quadratische Matrix A und keine Zahl wie 7, sondern einen Vektor $\mathbf{x}_0$ als Startwert:

$$\dot{\mathbf{x}} \stackrel{!}{=} A\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_0$$

Netterweise darf man die gleiche Lösungsformel wie im Eindimensionalen hinschreiben:

8

Hier steht die Exponentialfunktion einer Matrix, also „e hoch" diese Matrix!

Die große Frage ist nun, wie man das ausrechnen kann. Der Ausdruck $\exp(tA)$ muss eine zeitabhängige Matrix mit diesen beiden Eigenschaften sein:

9

Das ist eine Differentialgleichung für eine zeitabhängige Matrix. Auch diese Differentialgleichung ist eindeutig lösbar, das heißt: Es genügt, nach einer einzigen Lösung zu suchen. Und das ist diese:

10

Wie kann man sich überzeugen, dass dies eine Lösung ist?

11

Nun ist $\exp(tA)$ bekannt. Setzt man $t = 1$, kann man folgern, was $\exp(A)$ ist:

12

Achtung: Es wird also *nicht* Eintrag für Eintrag die Exponentialfunktion gebildet!

Die Exponentialfunktion e^a einer reellen oder komplexen Zahl a ergibt sich aus dieser Formel als Spezialfall für eine 1×1-Matrix. Außerdem findet man die Eulersche Zahl e selbst:

13

4 Überblick: Lösungsverfahren für gewöhnliche DGLn

Analytische Verfahren: „Bleistift und Papier“

1. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten, homogen	14
1. Ordnung, linear, inhomogen	15
	16
1. Ordnung	17
2. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten, homogen	18
2. Ordnung, linear, inhomogen	19
2. und höhere Ordnung	20

Numerische Verfahren

1. Ordnung	21
	22
	23
2. Ordnung aus der Mechanik	24
	25
2. und höhere Ordnung	26