

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 11. Mai 2009, 18:45

1 Prinzip

Die Trennung der Variablen [separation of variables] ist ein beliebter Trick, um Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, insbesondere auch nichtlineare. Zum Beispiel die Differentialgleichung

$$e^y y' \stackrel{!}{=} x^5 \quad \text{mit} \quad y(3) \stackrel{!}{=} 7$$

hat „trennbare“ Variablen [separable variables]: Auf der einen Seite stehen nur y und y' , auf der anderen steht nur x . Versuchen wir, beide Seiten vom Startpunkt $(x|y) = (3|7)$ bis zu einem noch unbekanntem Endpunkt $(x_1|y_1)$ zu integrieren:

1

Das linke Integral vereinfacht sich netterweise wegen der Substitutionsregel:

2

Und es ergibt sich als Lösung:

3

Vorsicht: Das Auflösen nach y_1 kann problematisch sein. Wann zum Beispiel?

Rein formal kann man ohne Substitutionsregel arbeiten, indem man die Differentialgleichung umformt zu

4

und dann auf beiden Seiten von $(x|y) = (3|7)$ bis $(x_1|y_1)$ integriert:

5

Ende des Skripts für heute!