Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 11. Mai 2009, 18:13

1 DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine Differentialgleichung hat zwei Zutaten: erstens eine Gleichung, in der eine Ableitung einer gesuchten Funktion vorkommt und zweitens ein Startpunkt („Anfangswert") im Phasenraum. Hier ist eine ganz einfache:

$$y'(x) \stackrel{!}{=} \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(3) \stackrel{!}{=} 7$$

Die Lösung kann man finden, indem man die Form der Lösung rät („Ansatz"):

1

Am Ergebnis sieht man schon, warum das Lösen von Differentialgleichungen auch Integrieren von Differentialgleichungen heißt.

Der Ansatz – die kultivierte Art des Ratens – ist beim Lösen vom Differentialgleichungen gang und gäbe. Wenn man eine (und damit typischerweise: *die*) Lösungsfunktion zum vorgegebenen Anfangswert angeben kann, hat man gewonnen, egal, wie man auf die Lösung gekommen ist.

Eine nicht mehr ganz triviale Differentialgleichung ist:

$$y'(x) + 5y(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad y(3) \stackrel{!}{=} 7$$

Was wäre hier ein naheliegender Ansatz für die Lösungsfunktion y?

2

Als Lösung ergibt sich damit:

3

Statt die Anfangsbedingung $y(3) \stackrel{!}{=} 7$ einzusetzen, schreibt man das Ergebnis oft einfacher mit einer „Integrationskonstanten“:

4

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung muss man als Anfangswert die Werte von $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ... bis $y^{(n)}(x_0)$ vorgeben (Startpunkt im Phasenraum!) – oder n unabhängige (!) Integrationskonstanten in der Lösung haben. Die heißt dann die „allgemeine“ Lösung [general solution].

Nun eine inhomogene Variante derselben Differentialgleichung:

$$y'(x) + 5y(x) \stackrel{!}{=} x^2$$

Man sucht nun zunächst eine „spezielle“ Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung, also irgendeine Lösung zu *irgendeinem* Anfangswert. Was wäre dafür ein sinnvoller Ansatz?

5

Um die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, addiert man eine spezielle Lösung (wie die eben gefundene) der homogenen Differentialgleichung zu einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (auch bereits bekannt):

6

Eine andere Art, die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, ist die „Variation der Konstante“: Man setzt die Integrationskonstante der homogenen Differentialgleichung als Funktion statt als Konstante an:

7

2 Differentialgleichungen in Octave

Octave löst Differentialgleichungen des Typs $y' = f(y,x)$ mit $y(x_0) = x_0$ numerisch:

```
function yAbl = f(y,x)
yAbl = -5*y+x^2
endfunction
x = [3:0.001:10];
y = lsode("f",7,x)
plot(x,y)
```

In MATLAB heißt das entsprechende Kommando `ode45`. Differentialgleichungen höherer Ordnung muss man zu Vektor-Differentialgleichungen erster Ordnung machen, um sie in Octave mit `lsode` numerisch zu lösen.

3 Lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Prototyp für *homogene* lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist das Federpendel mit Auslenkung x zur Zeit t, Masse m, Federkonstante D und Reibungskonstante r:

8

Welche Größen muss man als Anfangsbedingung angeben?

9

Bei geringer Reibung zeigt das Federpendel abklingende Schwingungen. Deshalb liegt der Ansatz nahe:

10

Mit Hilfe einer komplexen Zahl λ kann man das kompakter schreiben:

11

Dann muss für λ gelten:

12

Also hat man typischerweise (wenn nicht: siehe weiter hinten) *zwei* verschiedene Lösungen λ. Was passiert, wenn die λ einen imaginären Anteil haben?

13

Was passiert, wenn der Realteil negativ ist?

14

Was, wenn er positiv ist?

15

Die beiden Lösungen der Differentialgleichung zu den beiden λ darf man beliebig zusammenmischen und hat wieder eine Lösung, weil die DGL linear und homogen ist:

16

Damit hat man zwei Integrationskonstanten und so die Möglichkeit, alle erdenklichen Anfangswerte einzustellen:

17

Wenn zufällig die beiden λ gleich sind (und nur dann!), erhält man eine zweite Lösung der Differentialgleichung mit $t\,e^{\lambda t}$, also die allgemeine Lösung mit:

18

Die Differentialgleichung des Federpendels gibt es auch in einer inhomogenen Variante: Man regt das Pendel mit einer oszillierenden Kraft der Frequenz f und der Amplitude A an:

19

Hier wendet man wieder den Trick an, zu der allgemeinen Lösung der homogenen DGL eine spezielle Lösung der homogenen DGL zu addieren, um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu erhalten:

20

Welcher Ansatz liegt für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL nahe?

21