Eigenwerte und Eigenvektoren

Jörn Loviscach

Versionsstand: 2. Mai 2009, 19:34

1 Begriff

Fast das einfachste, was eine quadratische (!) Matrix A mit einem Vektor $\mathbf{v}$ machen kann, ist, ihn zu einem Vielfachen (λ-fachen) von sich zu machen: 1 . Mit dem Nullvektor geht das für alle λ. Das sagt also nichts über die Matrix A; deshalb fordert man $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Das Vielfache, also die Zahl λ, heißt dann Eigenwert [eigenvalue], der Vektor Eigenvektor [eigenvector]. Alle Vielfachen eines Eigenvektors sind automatisch auch Eigenvektoren; sie definieren eine Eigenrichtung. Nur das Nullfache, also der Nullvektor, gilt typischerweise nicht als Eigenvektor. Die Zahl Null kann aber Eigenwert sein – wenn die Matrix einen Vektor zum Nullvektor macht, der nicht selbst der Nullvektor ist. Beispiele:

Matrix	EV	EW	EV	EW
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$:	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:	6	7	8	9
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:	10	11	12	13
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:	14	15	16	17
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:	18	19	20	21

Achtung: Die Antworten können anders ausfallen, wenn man nach *komplexen* statt reellen Eigenwerten sucht (→ Seminar)!

2 Anwendungen

In der Physik treten geometrische Eigenvektoren und ihre Eigenwerte zum Beispiel bei den Drehbewegungen auf: Der Trägheitstensor (durch eine 3×3-Matrix darstellbar) beschreibt für alle Achsen, wie schwer es ist, ein Objekt um die jeweilige Achse zu drehen. Er hat drei Eigenrichtungen; die drei entsprechenden Eigenwerte sind die Hauptträgheitsmomente. Das Verhalten des Körpers lässt sich also durch drei Richtungen und drei Zahlen beschreiben:

22

Spannender sind Eigenvektoren in abstrakten Vektorräumen, insbesondere Eigenfunktionen, also Eigenvektoren in Funktionsräumen. Sie treten ebenso als Eigenschwingungen auf (→ Seminar) wie als Elektronenorbitale. Die Menge aller Eigenwerte einer Matrix heißt Spektrum. Das hat einen guten Grund: Für die schwingende Saite ist dieses mathematische Spektrum auch (fast) das akustische Frequenzspektrum; für das um den Atomkern fliegende Elektron ist das mathematische Spektrum auch das Energiespektrum, dessen Differenzen (Quantensprünge zwischen zwei Niveaus) im ausgestrahlten Licht sichtbar werden. An diesen Beispielen sieht man, dass die Eigenwerte oft interessanter sind als die Eigenvektoren: Das Spektrum sagt sozusagen in Kurzform, was die Matrix bewirkt.

Rein mathematisch sind Eigenvektoren interessant, weil man mit ihnen anschaulich verstehen kann, wie eine gegebene Matrix wirkt. Angenommen, man kann einen Vektor $\mathbf{x}$ mit Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$ der Matrix A darstellen: $\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \ldots$. Dann lässt sich sofort berechnen, was A mit $\mathbf{v}$ macht:

23

Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, kann man die Matrix sogar auf Diagonalform bringen: Eigenzerlegung *oder* spektrale Zerlegung [eigendecomposition *oder* spectral decomposition] (→ Seminar).

3 Bestimmung von Eigenwerten

Der einfachste – aber nicht immer schnellste, geschweige denn überhaupt mögliche – Weg, um Eigenwerte λ einer quadratischen Matrix A zu bestimmen, ist, von der Gleichung 24 mit einem angenommenen Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ auszugehen. Angenommen, man wüsste einen Eigenwert λ, hätte man hat also für $\mathbf{v}$ ein „lineares“ Gleichungssystem zu lösen:

25

$$, \quad (*)$$

und zwar mit einem $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Wann geht das?

26

Wenn man diesen Ausdruck komplett ausrechnet, entsteht ein Polynom (das „charakteristische Polynom“) in der Unbekannten λ. Ist A eine $n \times n$-Matrix, werden hier $n!$ Produkte von n-fachen Produkten aufsummiert: Offensichtlich hat das Polynom den Grad n.

Man kann also die Eigenwerte finden, indem man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt. Mehrfache Nullstellen werden „mehrfache“ Eigenwerte. Im Komplexen findet man typischerweise n allesamt voneinander verschiedene, also einfache Eigenwerte. In diesem Fall gehört zu jedem der n Eigenwerte eine andere Eigenrichtung, so dass man insgesamt n Eigenrichtungen hat und sich jeder Vektor in vollständig in Eigenvektoren zerlegen lässt.

Ausgehend von jedem Eigenwert löst man das lineare Gleichungssystem (*), um einen passenden Eigenvektor zu finden (→ Praktikum). Nicht wundern: Der ist nicht eindeutig bestimmt!

In Octave erhält man einen Vektor `E` mit den Eigenwerten einer quadratischen Matrix A mittels `E = eig(A)`. Der Befehl `[V,D] = eig(A)` liefert eine Matrix `D` mit den Eigenwerten auf der Diagonalen und eine Matrix `V` mit dazugehörigen Eigenvektoren als Spalten. Vorsicht: Octave sagt nicht Bescheid, wenn keine komplette Eigenzerlegung möglich ist.

4 Weitere Eigenschaften (pun intended)

Man kennt sofort die Eigenwerte und Eigenvektoren der Potenzen der Matrix: Wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist, gilt für $A^3\mathbf{v}$:

27

und, falls die inverse Matrix existiert, für $A^{-1}\lambda\mathbf{v}$:

28

Für Proberechnungen hilfreich: Angenommen, zum Beipiel eine 4×4-Matrix hat die Eigenwerte $7+i$, $7-i$ und -3, wobei $7+i$ und $7-i$ einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind und -3 eine doppelte Nullstelle -3 ist. Dann ist die Determinante der Matrix gleich $\boxed{29}$. Die Summe der Diagonalelemente (die „Spur“ der Matrix) ist gleich $\boxed{30}$ (Details → Seminar).

Ist A eine *symmetrische reelle* quadratische Matrix, müssen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ senkrecht zueinander sein (Beispiel → Seminar). Das passiert zum Beispiel beim Trägheitstensor und mit den Eigenfunktionen bei vielen Schwingungsproblemen (Details → Seminar).