Determinante, Spatprodukt, inverse Matrix

Jörn Loviscach

Versionsstand: 24. April 2009, 16:25

1 Determinante

Die Determinante [determinant] ordnet jeder quadratischen Matrix A eine Zahl $\det(A)$ zu. In Octave heißt diese Funktion genauso. Wenn die Matrix A über ihre Elemente gegeben ist, zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, schreibt man die Determinante auch

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Also Vorsicht: Runde Klammern (oder in den USA eckige Klammern) bezeichnen eine Matrix, Striche links und rechts dagegen eine daraus berechnete Zahl, die Determinante der Matrix. Der Name „Determinante" stammt daher, dass die Determinante einer Koeffizientenmatrix das Verhalten eines linearen Gleichungssystems „bestimmt", wie wir bei der inversen Matrix noch sehen werden.

Auch wenn die Schreibweise mit den Strichen an einen Betrag erinnert, ist die Determinante etwas Anderes. Sie gibt zwei geometrische Eigenschaften einer $n \times n$-Matrix an:

1. Der Betrag der Determinante (also ihr Wert ohne Vorzeichen) sagt, um welchen Faktor sich jedes n-dimensionale Volumen ändert, wenn man die Matrix anwendet, also wie eine 2×2-Matrix Flächeninhalte ändert, wie eine 3×3-Matrix Rauminhalte ändert und so weiter.

2. Das Vorzeichen der Determinante sagt, ob die Matrix die Orientierung des n-dimensionalen Raums ändert, also ob eine 3×3-Matrix eine rechte Hand zu einer linken Hand macht und so weiter.

Damit kann man viele Determinanten ohne Rechnung angeben:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{1}}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{2}}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{3}}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{4}},$$

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \boxed{{}^{5}}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{6}}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{7}}.$$

Was passiert, wenn man zwei $n \times n$-Matrizen hintereinander anwendet?

$$\det(AB) = \boxed{}$$

8

Außerdem folgen anschaulich sofort diverse Rechenregeln für Umformungen der Spalten einer Determinante. Es stellt sich nachher heraus, das sie ebenso für die Zeilen der Determinante gelten:

1. Multiplikation einer Spalte (Zeile) einer Matrix mit einer Zahl:

   9

2. Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) einer Matrix:

   10

3. Zwei identische Spalten (Zeilen):

   11

4. Eine Spalte (Zeile) einer Matrix als Summer zweier Vektoren:

12

5. Addition eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) auf eine *andere* (!) Spalte (Zeile) der Matrix:

13

Den mathematischen Namen für diese Sammlung an Rechenregeln müssen Sie sich nicht merken: „Die Determinante ist eine antisymmetrische Multilinearform der Spalten der Matrix.“

Mit den Rechenregeln kann man nun die Determinante jeder Matrix berechnen. Ein einfaches Beispiel ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

14

Hieran liest man die allgemeine Formel für 2×2-Determinanten ab:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \boxed{{}^{15}\qquad\qquad\qquad}$$

Für 3×3-Determinanten findet man eine Zerlegung in drei 2×2-„Unter“determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{16}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Dieser Schritt heißt „Entwicklung nach der ersten Spalte“. Er funktioniert entsprechend mit anderen Spalten und bei größeren Determinanten. Durch das Vertauschen entstehen Vorzeichen im Schachbrettmuster:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Wenn man diese Rechnung zu Ende ausführt, sieht man, dass Spalten und Zeilen gleichberechtigt sind – dass also für die Reihen die entsprechenden Rechengesetze gelten wie für die Zeilen und dass die Determinante beim Transponieren gleich bleibt: $\det(A^T) = \det(A)$.

Wenn man die Unterdeterminanten für die 3×3-Matrix ausrechnet, findet man die leicht zu merkende Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{{}^{17}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Vorsicht: Diese Regel stimmt *nicht* für 4×4- oder noch größere Determinanten!

Wenn man eine $n \times n$-Determinante naiv durch Entwickeln aufdröselt, muss man die Summe von $n!$ Produkten mit je n Faktoren berechnen. Der Rechenaufwand und die Rundungsfehler explodieren mit größeren n, selbst wenn man geschickter rechnet. Man schreibt deshalb die Determinanten größerer Matrizen allenfalls als Zwischenschritt hin, um Formeln zu vereinfachen, vermeidet aber strikt, solche Determinanten tatsächlich auszurechnen.

2 Spatprodukt

Das Spatprodukt [triple product] ist wie das Vektorprodukt eine Sonderausstattung des $\mathbb{R}^3$. Allerdings ist hat es nicht nur zwei Faktoren, sondern *drei*: Man nimmt drei Vektoren und stellt sie nebeneinander in eine 3×3-Determinante. Das Spatprodukt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist also die Zahl

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Warum „Spat“produkt? – Weil es das Volumen des Spats (Parallelepiped; vgl. Kalkspat-Kristall) berechnet, der von den drei Vektoren aufgespannt wird, mit Vorzeichen für die Orientierung. Um das zu verstehen, sieht man sich an, was die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ aus dem Einheitswürfel macht:

18

Der Volumeninhalt $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ des Einheitswürfels wird also der Volumeninhalt des Spats. Die Determinante gibt das Verhältnis dieser beiden Volumina an, samt Vorzeichen. Also ist das Volumen des Spats mit Vorzeichen gleich der Determinante und damit gleich dem Spatprodukt.

Wenn man das Spatprodukt nach der ersten Spalte entwickelt, sieht man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

19

Also kann man das Spatprodukt mit dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

20

Wenn man die drei Vektoren zyklisch durchtauscht, ändert sich nichts am Volumen und an der Händigkeit, also:

$$\ldots =$$

21

Diese Gleichungen sind eigentlich die Definition des Vektorprodukts und der Grund für seine komische Berechnung: Das Vektorprodukt $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ zweier Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ist derjenige Vektor $\mathbf{v}$, für den gilt:

22

Mit Hilfe dieser 3×3-Determinante kann man sich die Formel für das Vektorprodukt merken.

3 Inverse Matrix

Betrachten wir ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit n Gleichungen und n (also genau so vielen!) Unbekannten. Dann ist die Koeffizientenmatrix A quadratisch und man kann ihre Determinante $\det(A)$ bilden. Je nachdem, ob diese Determinante null ist oder nicht, passiert geometrisch etwas Verschiedenes:

- $\det(A) = 0 \quad \Longrightarrow$

23

24

- $\det(A) \neq 0 \quad \Longrightarrow$

Im Fall $\det(A) \neq 0$ kann man also immer und eindeutig von jeder Inhomogenität $\mathbf{b}$ auf ein dazu passendes $\mathbf{x}$ schließen, welches das lineare Gleichungssystem löst: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Zu einem Vielfachen der Inhomogenität $\mathbf{b}$ gehört ein Vielfaches von $\mathbf{x}$. Zu einer Summe zweier $\mathbf{b}$ gehört die Summe der entsprechenden $\mathbf{x}$. Das heißt, man findet eine eindeutig bestimmte $n \times n$-Matrix, die $\mathbf{b}$ zu $\mathbf{x}$ macht. Diese Matrix heißt die inverse Matrix A^{-1} zu A. Sie gibt es *nur* für quadratische Matrizen A und *nur* wenn $\det(A) \neq 0$. Sie erfüllt für alle Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

25

Die Schreibweise A^{-1} ist in der Tat wie der Kehrwert und wie die Potenz -1 bei Zahlen gemeint: Analog zu $3^{-1} \cdot 3 = 1$ gelten (warum?)

$$A^{-1}A = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad A\,A^{-1} = \mathbf{1}.$$

Bei Zahlen kann man von der Null keinen Kehrwert bilden; entsprechend kann man von nichtquadratischen Matrizen oder von Matrizen mit Determinante null keine inverse Matrix bilden. Für diese Matrizen gibt es allerdings eine Behelfslösung, die „Pseudoinverse“.

In Octave schreibt man `inv(A)` oder die Potenz -1 für die inverse Matrix. Um ein „quadratisches“ lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zu lösen, kann man in Octave mit `A\b` auch $\mathbf{b}$ sozusagen von links durch A teilen (Schrägstrich rückwärts!).