# Dreiecke, Geraden, Lineare Gleichungssysteme

Jörn Loviscach

Versionsstand: 18. April 2009, 19:46

## 1 Cosinussatz

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man den Cosinussatz [law of cosines] zeigen. Seien **a** und **b** Vektoren, die den Seiten $a$ und $b$ des Dreiecks entsprechen. Dazwischen liegt der Winkel $\gamma$. Der dritten Seite $c$ entspricht damit der Vektor $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ oder umgekehrt $\mathbf{b}-\mathbf{a}$. Für das Quadrat der Länge der dritten Seite ergibt sich:

1

Das ist der Cosinussatz. Er gilt entsprechend auch für $b$, $c$, $\alpha$ und $a$ sowie für $c$, $a$, $\beta$ und $b$. Für $\gamma = 90°$ ergibt sich der Satz des Pythagoras. Der Cosinussatz verallgemeinert also den Satz von Pythagoras auf nicht-rechtwinklige Dreiecke.

Der Cosinussatz verknüpft die Längen zweier Seiten und den Winkel dazwischen mit der Länge der dritten Seite. Wenn man drei dieser vier Größen kennt, kann man mit dem Cosinussatz die vierte bestimmen (→ Fingerübungen).

## 2 Sinussatz

Mit Hilfe der Fläche eines Dreiecks (und damit indirekt per Vektorprodukt) kann man den Sinussatz [law of sines] zeigen. Aus den Seiten $a$, $b$ und dem Winkel $\gamma$ dazwischen lässt sich die Fläche eines Dreiecks bestimmen:

2

Das gleiche Ergebnis muss natürlich auch herauskommen, wenn man die Fläche desselben Dreiecks anders bestimmt: aus den Seiten $b$, $c$ und dem Winkel $\alpha$ dazwischen. Also gilt:

3

Die Seite $b$ und der Winkel $\beta$ haben keine Sonderrolle, so dass gelten muss:

4

Oder im Kehrwert:

5

Diese Gleichungen sind der Sinussatz. Natürlich muss man bei diesen Gleichungen aufpassen, nicht durch null zu teilen.

Der Sinussatz verknüpft die Längen zweier Seiten mit den beiden Winkeln, die den Seiten gegenüberliegen. Wenn man drei dieser vier Größen kennt, kann man mit dem Sinusssatz die vierte bestimmen (→ Fingerübungen). Vorsicht: Aus dem Sinus folgt der Winkel nicht eindeutig, denn $\sin(\phi) =$ 6 für alle Winkel $\phi$.

# 3 Parametrische Geradengleichungen

Geometrische Objekte wie Dreiecke oder Kugeln oder Öllagerstätten ;-) fasst man in der Linearen Algebra als Mengen von Punkten auf. Das einfachste geometrische Objekt nach den einzelnen Punkt ist eine Gerade. Daran kann man einige Techniken verstehen, die auch für kompliziertere Objekte wichtig sind.

Die Gerade $g$ im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte (2|1|2) und (4|3|1) ist demzufolge eine Menge an unendlich vielen Ortsvektoren:

$g =$ 7

Geschickter ist natürlich, eine Formel anzugeben, statt die Punkte aufzulisten. Die übliche Art, das zu tun, ist die Punkt-Richtungs-Form: Die Gerade besteht aus allen Punkten, die bei (2|1|2) startend in der richtigen Richtung liegen:

$g =$ 8

Typischerweise schreibt man nicht super-korrekt diese Mengengleichung hin, sondern fasst sich knapp:

$g :$ 9

Achtung: Doppelpunkt statt eines Gleichheitszeichens!

Die Größe $\lambda$ ist der frei einstellbare „Parameter“. Deshalb heißt diese diese Form der Geradengleichung auch eine Parameterform. Unschön: Der Ortsvektor und der Richtungsvektor sind nicht eindeutig bestimmt. Was wäre eine andere Art, dieselbe Gerade $g$ hinzuschreiben? (Auch der Parameter ist dann anders; deshalb sollte man ihn nicht $\lambda$ nennen.)

10

$g:$

Eine andere Parameterform der Geradengleichung ist die Zwei-Punkte-Form: Man blendet sozusagen zwischen zwei gegebenen Punkten über, so dass die Summe der Anteile 1 ergibt. Allerdings sind auch negative Anteile und Anteile über 1 erlaubt:

11

$g:$

# 4 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Algebra ist nicht nur für anschauliche Geometrie gut, sondern hilft auch, bestimmte häufig vorkommende Gleichungen zu verstehen und zu lösen: lineare Gleichungssysteme wie

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right.$$

Gemeint ist damit, dass alle diese drei Gleichungen mit ihren vier Unbekannten $x$, $y$, $z$, $w$ gleichzeitig gelöst werden sollen. Die Lösungsmenge ist also eine Teilmenge des 12 , vielleicht sogar die leere Menge, wenn es keine Lösungen gibt. Diese Gleichungen heißen linear, weil nur konstante Vielfache der Unbekannten addiert werden. Ausdrücke wie $\sin(x)$ oder $y^2$ oder $xz$ sind in linearen Gleichungen verboten, wenn $x$, $y$ und $z$ Unbekannte sind.

Lineare Gleichungssysteme treten vor allem auf, wenn man elektrische oder mechanische (oder soziale?) Netzwerke untersucht. Ein Beispiel aus der Elektronik:

13

# 5 Existenz von Lösungen

Zurück zum ursprünglichen Beispiel. Das kann man erstens mit Hilfe von Vektoren umschreiben:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

14

Mit anderen Worten: Es ist eine Mischung der vier Spaltenvektoren zu finden, so dass der Vektor rechts (die „Inhomogenität“) herauskommt. Wenn sich die Inhomogenität nicht aus den vier Spaltenvektoren bilden lässt, gibt es keine Lösung!

Wenn es mindestens so viele Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, wie es Gleichungen gibt, existiert typischerweise (→ Seminar) mindestens eine Lösung. Wenn es weniger Unbekannte als Gleichungen gibt, lassen sich garantiert nicht bei allen Inhomogenitäten Lösungen finden.

Mit Hilfe einer Matrix (der „Koeffizientenmatrix“) lässt sich das sogar noch kompakter schreiben:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

15

Es ist also ein Vektor zu finden, den die Matrix zu der Inhomogenität macht, also zu dem Vektor rechts. Wenn die Inhomogenität nie aus der Matrix herauskommt, ist die Lösungsmenge leer.

Nennt man die Koeffizientenmatrix $A$, setzt $\mathbf{x} := (x|y|z|w)^T$ und nennt die Inhomogenität $\mathbf{b}$, ist also abstrakt folgende Gleichung zu lösen:

16

# 6 Eindeutigkeit von Lösungen

Angenommen, man hätte zwei Lösungen gefunden: $(x_1|y_1|z_1|w_1)^T$ und $(x_2|y_2|z_2|w_2)^T$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x_1 & + & 45y_1 & - & 3z_1 & + & 4w_1 & = & 7 \\ & & 2y_1 & - & z_1 & + & 6w_1 & = & -3 \\ -15x_1 & + & 5y_1 & & & - & 3w_1 & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x_2 & + & 45y_2 & - & 3z_2 & + & 4w_2 & = & 7 \\ & & 2y_2 & - & z_2 & + & 6w_2 & = & -3 \\ -15x_2 & + & 5y_2 & & & - & 3w_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

Indem man die Gleichungen voneinander abzieht, findet man:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23(x_1-x_2) & + & 45(y_1-y_2) & - & 3(z_1-z_2) & + & 4(w_1-w_2) & = & 0 \\ & & 2(y_1-y_2) & - & (z_1-z_2) & + & 6(w_1-w_2) & = & 0 \\ -15(x_1-x_2) & + & 5(y_1-y_2) & & & - & 3(w_1-w_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Differenzen. Auf der rechten Seite stehen allerdings Nullen: ein „homogenes“ Gleichungssystem (Gegenteil von inhomogen, eben mit einer Inhomogenität).

Mit anderen Worten: Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems – wenn es welche gibt – sind nicht eindeutig bestimmt, wenn das *homogene* Gleichungssystem eine von (0|0|0|0) verschiedene Lösung hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der Nullvektor aus der Koeffizientenmatrix herauskommen kann, ohne dass man den Nullvektor hereinsteckt.

Wenn es mehr Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, als es Gleichungen gibt, ist eine Lösung – falls eine existiert – keinesfalls eindeutig bestimmt. Wenn es höchstens so viele Unbekannte wie Gleichungen gibt, ist eine Lösung – falls eine existiert – typischerweise (→ Seminar) eindeutig bestimmt.

Zusammengefasst sieht die Lösbarkeit so aus:

| Situation | Existenz | Eindeutigkeit |
|---|---|---|
| weniger Unbekannte als Gleichungen | 17 | 18 |
| so viele Unbekannte wie Gleichungen | 19 | 20 |
| mehr Unbekannte als Gleichungen | 21 | 22 |

„Weniger Unbekannte als Gleichungen“ heißt auch „überbestimmt“, „mehr Unbekannte als Gleichungen“ heißt auch „unterbestimmt“.