

# Länge, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. April 2009, 19:39

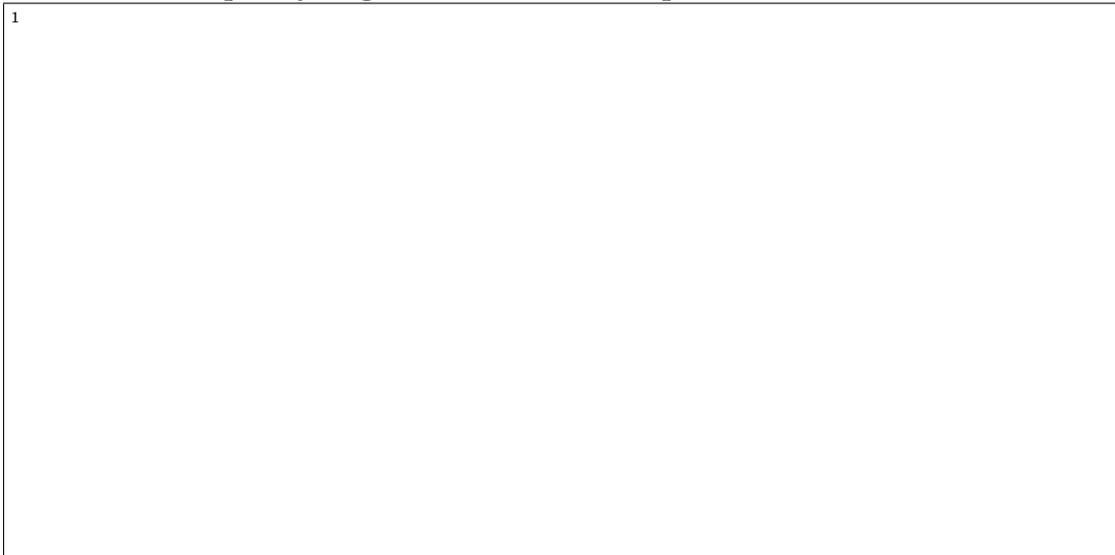
## 1 Überblick

Ein Vektorraum muss nur eine Minimalausstattung an Rechenoperationen besitzen: die Addition zweier Vektoren und die Multiplikationen einer Zahl („Skalar“) mit einem Vektor. Die Vektorräume  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , ... können aber noch mehr: Jeder Vektor dort hat eine Länge; außerdem gibt es ein Produkt Vektor mal Vektor gleich Skalar, genannt „Skalarprodukt“ [dot product *oder* scalar product]. Länge und Skalarprodukt lassen sich prinzipiell auf verschiedene Arten definieren. Die übliche Art heißt „euklidisch“. Nur diese kommt hier vor.

Im  $\mathbb{R}^3$  und nur dort, also in drei Dimensionen, gibt es ein weiteres Produkt: das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt genannt [cross product *oder* vector product]. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor (streng genommen ein Pseudovektor).

## 2 Länge

Die Länge  $\|\mathbf{a}\|$  (auch  $|\mathbf{a}|$  geschrieben) eines Vektors  $\mathbf{a}$  aus dem  $\mathbb{R}^2$  oder dem  $\mathbb{R}^3$  lässt sich leicht per Pythagoras aus seinen Komponenten bestimmen:



Entsprechend definiert man die Länge für alle Räume  $\mathbb{R}^n$ , auch wenn die anschauliche Bedeutung davon nicht so klar ist wie in zwei und drei Dimensionen.

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt Einheitsvektor [unit vector]. Jeder Vektor  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  kann in einen Einheitsvektor gleicher Richtung umgewandelt werden:

2

Der Einheitsvektor zum Vektor  $\mathbf{a}$  (der nicht der Nullvektor sein darf) heißt  $\mathbf{a}^0$ . Das ist *keine* Potenz!

### 3 Skalarprodukt

In der Physik kommt das Skalarprodukt zum Beispiel bei der Berechnung der mechanischen Arbeit  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$  vor: Kraft mal Weg in Richtung der Kraft oder Kraft in Richtung des Wegs mal den Weg.

Das Skalarprodukt ist eine simple Rechenoperation. Hier ein Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ :

3

Entsprechendes gilt für das Skalarprodukt in jedem Raum  $\mathbb{R}^n$ . In diesen Räumen schreibt man das Skalarprodukt typischerweise mit einem Punkt wie in  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , daher die englische Bezeichnung dot product. In komplizierteren Räumen schreibt man spitze Klammern  $\langle a, b \rangle$ .

Das Skalarprodukt ist kommutativ („symmetrisch“) und erfüllt eine Art Distributivgesetz („Bilinearität“):

4

Das Skalarprodukt ist nur deswegen spannend, weil es eine geometrische Bedeutung hat: Man kann es leicht ausrechnen und damit etwas über die Geometrie lernen – nämlich über Längen und Winkel. Als erstes bemerkt man, dass das Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  eines Vektors  $\mathbf{a}$  mit sich selbst nichts Neues ist:

5

Als nächstes fällt auf, dass das Skalarprodukt eines Vektors  $\mathbf{a}$  mit einem dazu senkrechten Vektor  $\mathbf{b}$  gleich der Zahl Null ist. Dazu berechnet man  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$ :

6

Dies benutzt man dann umgekehrt, um den Begriff „senkrecht“ zu definieren: Zwei Vektoren heißen senkrecht oder auch orthogonal zueinander [perpendicular oder *seltener* orthogonal], wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist. Der Nullvektor gilt also als senkrecht zu allen Vektoren!

Mit diesen Kenntnissen kann man nun allgemein herleiten, was das Skalarprodukt geometrisch bedeutet. Um  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  zu bestimmen, kann man  $\mathbf{b}$  in zwei Teile zerlegen:  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$ , wobei  $\mathbf{b}_{\parallel}$  parallel (oder antiparallel) zu  $\mathbf{a}$  ist und  $\mathbf{b}_{\perp}$  senkrecht zu  $\mathbf{a}$  ist:

7

Damit ergibt sich geometrisch:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \boxed{\phantom{0}},$$

wobei  $\phi$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Für einen spitzen Winkel [acute angle] und für einen stumpfen Winkel [obtuse angle] zwischen den Vektoren gilt also:

$$\boxed{\phantom{0}}$$

## 4 Vektorprodukt

In der Physik kommt das Vektorprodukt zum Beispiel bei der Drehbewegung vor. Wenn  $\boldsymbol{\omega}$  die Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit angibt und  $\mathbf{r}$  ein Vektor von der Achse zu einem Punkt des rotierenden Körpers ist, ist der Geschwindigkeitsvektor des Punkts gleich  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ .

Rechnerisch bestimmt sich das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

so:

$$\boxed{\phantom{0}}$$

Wie man auf diesen komischen Ausdruck kommt, wird später bei den Determinanten klar („Spatprodukt“). Man kann leicht nachrechnen, dass das

Vektorprodukt wie das Skalarprodukt bilinear ist:

11

Im Unterschied zum Skalarprodukt ist es aber *antikommutativ*:

12

Das heißt insbesondere für das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst oder einem Vielfachen von sich:

13

Geometrisch kann man das Vektorprodukt durch drei Eigenschaften eindeutig beschreiben:

1. Das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  steht auf beiden senkrecht.

14

2. Das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist so gerichtet, dass  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  die Händigkeit von  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  haben (in der Physik typischerweise rechts-

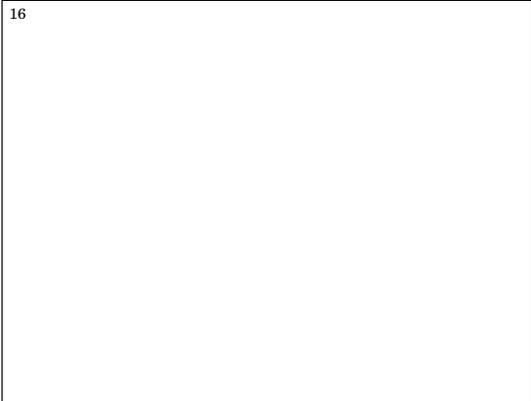
händig).

15



3. Die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist gleich der Fläche des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms. (Uh-oh: Länge gleich Fläche. Das ist ein Nebeneffekt davon, dass das Vektorprodukt nur ein *Pseudovektor* ist.)

16



Die letztere Eigenschaft kann man benutzen, um die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  mit dem Winkel  $\phi$  zwischen den beiden auszudrücken:

17



## 5 Produkte mit Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar (nicht mit Skalarprodukt verwechseln):

18

Matrix mal Spaltenvektor:

19

Zeilenvektor mal Matrix:

20

Skalarprodukt:

21

Vektorprodukt (nur im  $\mathbb{R}^3$ ):

22

Skalar- und Vektorprodukt mit Sinus und Cosinus ausgedrückt:

23

