

Länge, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. April 2009, 19:39

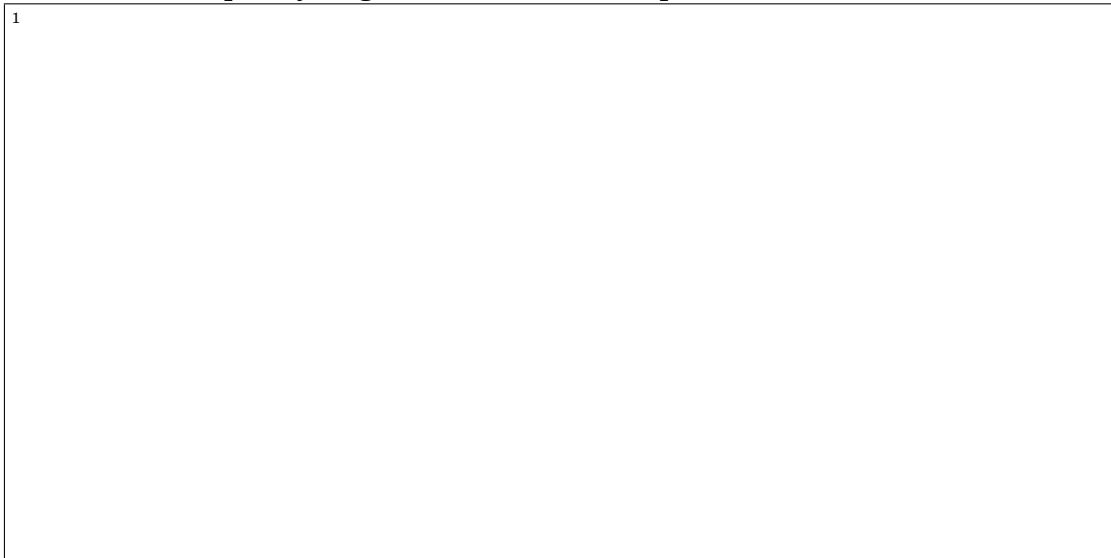
1 Überblick

Ein Vektorraum muss nur eine Minimalausstattung an Rechenoperationen besitzen: die Addition zweier Vektoren und die Multiplikationen einer Zahl („Skalar“) mit einem Vektor. Die Vektorräume \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , ... können aber noch mehr: Jeder Vektor dort hat eine Länge; außerdem gibt es ein Produkt Vektor mal Vektor gleich Skalar, genannt „Skalarprodukt“ [dot product *oder* scalar product]. Länge und Skalarprodukt lassen sich prinzipiell auf verschiedene Arten definieren. Die übliche Art heißt „euklidisch“. Nur diese kommt hier vor.

Im \mathbb{R}^3 und nur dort, also in drei Dimensionen, gibt es ein weiteres Produkt: das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt genannt [cross product *oder* vector product]. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor (streng genommen ein Pseudovektor).

2 Länge

Die Länge $\|\mathbf{a}\|$ (auch $|\mathbf{a}|$ geschrieben) eines Vektors \mathbf{a} aus dem \mathbb{R}^2 oder dem \mathbb{R}^3 lässt sich leicht per Pythagoras aus seinen Komponenten bestimmen:



Entsprechend definiert man die Länge für alle Räume \mathbb{R}^n , auch wenn die anschauliche Bedeutung davon nicht so klar ist wie in zwei und drei Dimensionen.

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt Einheitsvektor [unit vector]. Jeder Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ kann in einen Einheitsvektor gleicher Richtung umgewandelt werden:

2

Der Einheitsvektor zum Vektor \mathbf{a} (der nicht der Nullvektor sein darf) heißt \mathbf{a}^0 . Das ist *keine* Potenz!

3 Skalarprodukt

In der Physik kommt das Skalarprodukt zum Beispiel bei der Berechnung der mechanischen Arbeit $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ vor: Kraft mal Weg in Richtung der Kraft oder Kraft in Richtung des Wegs mal den Weg.

Das Skalarprodukt ist eine simple Rechenoperation. Hier ein Beispiel im \mathbb{R}^3 :

3

Entsprechendes gilt für das Skalarprodukt in jedem Raum \mathbb{R}^n . In diesen Räumen schreibt man das Skalarprodukt typischerweise mit einem Punkt wie in $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, daher die englische Bezeichnung dot product. In komplizierteren Räumen schreibt man spitze Klammern $\langle a, b \rangle$.

Das Skalarprodukt ist kommutativ („symmetrisch“) und erfüllt eine Art Distributivgesetz („Bilinearität“):

4

Das Skalarprodukt ist nur deswegen spannend, weil es eine geometrische Bedeutung hat: Man kann es leicht ausrechnen und damit etwas über die Geometrie lernen – nämlich über Längen und Winkel. Als erstes bemerkt man, dass das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ eines Vektors \mathbf{a} mit sich selbst nichts Neues ist:

5

Als nächstes fällt auf, dass das Skalarprodukt eines Vektors \mathbf{a} mit einem dazu senkrechten Vektor \mathbf{b} gleich der Zahl Null ist. Dazu berechnet man $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$:

6

Dies benutzt man dann umgekehrt, um den Begriff „senkrecht“ zu definieren: Zwei Vektoren heißen senkrecht oder auch orthogonal zueinander [perpendicular oder *seltener* orthogonal], wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist. Der Nullvektor gilt also als senkrecht zu allen Vektoren!

Mit diesen Kenntnissen kann man nun allgemein herleiten, was das Skalarprodukt geometrisch bedeutet. Um $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zu bestimmen, kann man \mathbf{b} in zwei Teile zerlegen: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$, wobei \mathbf{b}_{\parallel} parallel (oder antiparallel) zu \mathbf{a} ist und \mathbf{b}_{\perp} senkrecht zu \mathbf{a} ist:

7

Damit ergibt sich geometrisch:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \boxed{},$$

wobei ϕ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Für einen spitzen Winkel [acute angle] und für einen stumpfen Winkel [obtuse angle] zwischen den Vektoren gilt also:

$$\boxed{}$$

4 Vektorprodukt

In der Physik kommt das Vektorprodukt zum Beispiel bei der Drehbewegung vor. Wenn $\boldsymbol{\omega}$ die Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit angibt und \mathbf{r} ein Vektor von der Achse zu einem Punkt des rotierenden Körpers ist, ist der Geschwindigkeitsvektor des Punkts gleich $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Rechnerisch bestimmt sich das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

so:

$$\boxed{}$$

Wie man auf diesen komischen Ausdruck kommt, wird später bei den Determinanten klar („Spatprodukt“). Man kann leicht nachrechnen, dass das

Vektorprodukt wie das Skalarprodukt bilinear ist:

11

Im Unterschied zum Skalarprodukt ist es aber *antikommutativ*:

12

Das heißt insbesondere für das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst oder einem Vielfachen von sich:

13

Geometrisch kann man das Vektorprodukt durch drei Eigenschaften eindeutig beschreiben:

1. Das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} steht auf beiden senkrecht.

14

2. Das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist so gerichtet, dass \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Händigkeit von \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z haben (in der Physik typischerweise rechts-

händig).

15



3. Die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist gleich der Fläche des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms. (Uh-oh: Länge gleich Fläche. Das ist ein Nebeneffekt davon, dass das Vektorprodukt nur ein *Pseudovektor* ist.)

16



Die letztere Eigenschaft kann man benutzen, um die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mit dem Winkel ϕ zwischen den beiden auszudrücken:

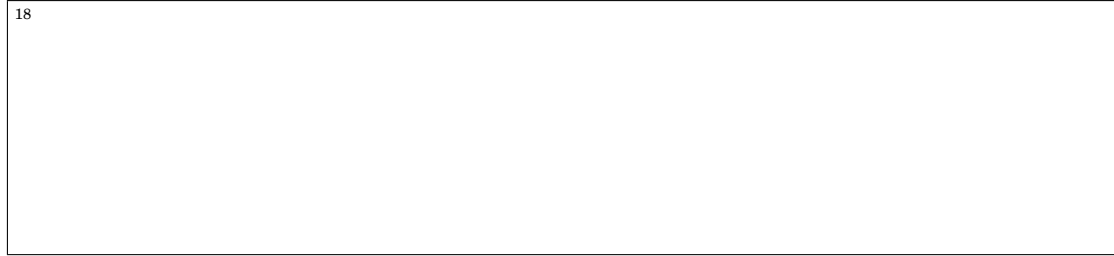
17



5 Produkte mit Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar (nicht mit Skalarprodukt verwechseln):

18



Matrix mal Spaltenvektor:

19



Zeilenvektor mal Matrix:

20



Skalarprodukt:

21



Vektorprodukt (nur im \mathbb{R}^3):

22



Skalar- und Vektorprodukt mit Sinus und Cosinus ausgedrückt:

23

