Länge, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. April 2009, 19:39

1 Überblick

Ein Vektorraum muss nur eine Minimalausstattung an Rechenoperationen besitzen: die Addition zweier Vektoren und die Multiplikationen einer Zahl („Skalar“) mit einem Vektor. Die Vektorräume $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ können aber noch mehr: Jeder Vektor dort hat eine Länge; außerdem gibt es ein Produkt Vektor mal Vektor gleich Skalar, genannt „Skalarprodukt“ [dot product *oder* scalar product]. Länge und Skalarprodukt lassen sich prinzipiell auf verschiedene Arten definieren. Die übliche Art heißt „euklidisch“. Nur diese kommt hier vor.

Im $\mathbb{R}^3$ und nur dort, also in drei Dimensionen, gibt es ein weiteres Produkt: das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt genannt [cross product *oder* vector product]. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor (streng genommen ein Pseudovektor).

2 Länge

Die Länge $\|\mathbf{a}\|$ (auch $|\mathbf{a}|$ geschrieben) eines Vektors $\mathbf{a}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ oder dem $\mathbb{R}^3$ lässt sich leicht per Pythagoras aus seinen Komponenten bestimmen:

1

Entsprechend definiert man die Länge für alle Räume $\mathbb{R}^n$, auch wenn die anschauliche Bedeutung davon nicht so klar ist wie in zwei und drei Dimensionen.

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt Einheitsvektor [unit vector]. Jeder Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ kann in einen Einheitsvektor gleicher Richtung umgewandelt werden:

2

Der Einheitsvektor zum Vektor $\mathbf{a}$ (der nicht der Nullvektor sein darf) heißt $\mathbf{a}^0$. Das ist *keine* Potenz!

3 Skalarprodukt

In der Physik kommt das Skalarprodukt zum Beispiel bei der Berechnung der mechanischen Arbeit $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ vor: Kraft mal Weg in Richtung der Kraft oder Kraft in Richtung des Wegs mal den Weg.

Das Skalarprodukt ist eine simple Rechenoperation. Hier ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$:

3

Entsprechendes gilt für das Skalarprodukt in jedem Raum $\mathbb{R}^n$. In diesen Räumen schreibt man das Skalarprodukt typischerweise mit einem Punkt wie in $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, daher die englische Bezeichnung dot product. In komplizierteren Räumen schreibt man spitze Klammern $\langle a, b \rangle$.

Das Skalarprodukt ist kommutativ („symmetrisch“) und erfüllt eine Art Distributivgesetz („Bilinearität“):

4

Das Skalarprodukt ist nur deswegen spannend, weil es eine geometrische Bedeutung hat: Man kann es leicht ausrechnen und damit etwas über die Geometrie lernen – nämlich über Längen und Winkel. Als erstes bemerkt man, dass das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ eines Vektors $\mathbf{a}$ mit sich selbst nichts Neues ist:

5

Als nächstes fällt auf, dass das Skalarprodukt eines Vektors **a** mit einem dazu senkrechten Vektor **b** gleich der Zahl Null ist. Dazu berechnet man $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2$:

6

Dies benutzt man dann umgekehrt, um den Begriff „senkrecht“ zu definieren: Zwei Vektoren heißen senkrecht oder auch orthogonal zueinander [perpendicular *oder seltener* orthogonal], wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist. Der Nullvektor gilt also als senkrecht zu allen Vektoren!

Mit diesen Kenntnissen kann man nun allgemein herleiten, was das Skalarprodukt geometrisch bedeutet. Um $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ zu bestimmen, kann man **b** in zwei Teile zerlegen: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp$, wobei $\mathbf{b}_\parallel$ parallel (oder antiparallel) zu **a** ist und $\mathbf{b}_\perp$ senkrecht zu **a** ist:

7

Damit ergibt sich geometrisch:

8

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \qquad ,$$

wobei ϕ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Für einen spitzen Winkel [acute angle] und für einen stumpfen Winkel [obtuse angle] zwischen den Vektoren gilt also:

9

4 Vektorprodukt

In der Physik kommt das Vektorprodukt zum Beispiel bei der Drehbewegung vor. Wenn $\boldsymbol{\omega}$ die Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit angibt und $\mathbf{r}$ ein Vektor von der Achse zu einem Punkt des rotierenden Körpers ist, ist der Geschwindigkeitsvektor des Punkts gleich $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Rechnerisch bestimmt sich das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ so:

10

Wie man auf diesen komischen Ausdruck kommt, wird später bei den Determinanten klar („Spatprodukt“). Man kann leicht nachrechnen, dass das

Vektorprodukt wie das Skalarprodukt bilinear ist:

11

Im Unterschied zum Skalarprodukt ist es aber *anti*kommutativ:

12

Das heißt insbesondere für das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst oder einem Vielfachen von sich:

13

Geometrisch kann man das Vektorprodukt durch drei Eigenschaften eindeutig beschreiben:

1. Das Vektorprodukt zweier Vektoren **a** und **b** steht auf beiden senkrecht.

   14

2. Das Vektorprodukt zweier Vektoren **a** und **b** ist so gerichtet, dass **a**, **b**, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Händigkeit von $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ haben (in der Physik typischerweise rechts-

händig).

15

3. Die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren **a** und **b** ist gleich der Fläche des von **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms. (Uh-oh: Länge gleich Fläche. Das ist ein Nebeneffekt davon, dass das Vektorprodukt nur ein *Pseudo*vektor ist.)

16

Die letztere Eigenschaft kann man benutzen, um die Länge des Vektorprodukts zweier Vektoren **a** und **b** mit dem Winkel ϕ zwischen den beiden auszudrücken:

17

5 Produkte mit Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar (nicht mit Skalarprodukt verwechseln):

18

Matrix mal Spaltenvektor:

19

Zeilenvektor mal Matrix:

20

Skalarprodukt:

21

Vektorprodukt (nur im $\mathbb{R}^3$):

22

Skalar- und Vektorprodukt mit Sinus und Cosinus ausgedrückt:

23