Überblick

Jörn Loviscach

Versionstand: 23. März 2009, 18:05

1 Rolle der Mathematik

Mathematik sagt nicht, was die Welt ist. Mathematik ist nur ein Baukasten, um die Welt zu modellieren – und damit zum Beispiel vorherzusagen, welchen Wirkungsgrad ein Solarmodul hat oder wie dünn das Eis der Arktis im nächsten Sommer ist. Die Natur- und Technikwissenschaften benutzen die Mathematik, um immer genauere Modelle zu formulieren. Kaum jemand hofft noch, dabei eine endgültige „Wahrheit" zu finden. Vielmehr scheint der Prozess endlos.

Beispiel 1: Atome von Demokrit $\longrightarrow$ Bohrsches Atommodell $\longrightarrow$ Orbitalmodell $\longrightarrow$ Atomkern aus Protonen und Neutronen $\longrightarrow$ Quarks und Gluonen $\longrightarrow$ Superstrings?

Beispiel 2: Aristotelisches Weltbild $\longrightarrow$ Ptolemäus' exzentrische Epizykel $\longrightarrow$ Kopernikanisches Weltbild $\longrightarrow$ Kepler-Ellipsen $\longrightarrow$ Periheldrehung nach Einstein; Bewegung der Sonne in der Milchstraße; Expansion des Universums; dunkle Materie?

Die Naturwissenschaften können nicht sagen, was etwas wirklich ist oder wie es wirklich funktioniert. Sie geben nur mehr oder minder hilfreiche Modelle: „Theorien". Insofern gibt es in den Naturwissenschaften streng genommen auch keine Beweise, anders als in der Mathematik. (Kann man einen Gegenstand auf eine Geschwindigkeit schneller als das Licht beschleunigen? Nach der speziellen Relativitätstheorie keinesfalls, mit einer eigenwilligen Krümmung der Raumzeit vielleicht doch.) Allerdings verlangt man von naturwissenschaftlichen Theorien, dass sie *widerlegt* werden können. „Mein Freund Harvey" ist keine naturwissenschaftliche Theorie.

Wir schreiben zwar Sätze wie: „Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Sonne." Eigentlich ist aber etwas gemeint wie: „Wenn man so rechnet, als ob sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt, kann man den Sonnenstand hinreichend genau vorhersagen, um eine Solaranlage zu planen, denn die Schwankungen im Lichteinfall zum Beispiel durch die wechselnde Bewölkung sind so stark, dass der Sonnenstand nicht sehr genau bekannt sein muss."

Mathematik ist nie die Wirklichkeit (was auch immer man darunter versteht), sondern ein Mittel, Beobachtungen zu Modellen zu verdichten und dann daraus

Vorhersagen zu gewinnen, insbesondere durch Simulationen:

Für diesen Prozess der Abstraktion und Vorhersage gibt es nicht die eine richtige Lösung, sondern nur mehr oder minder brauchbare Lösungen. Eine wesentliche Kunst in den Ingenieurwissenschaften besteht darin, mathematische Modelle zu finden, die genau genug sind – aber nicht übertrieben genau und detailliert, denn dann sind sie praktisch unbrauchbar. Beispiel: Niemand modelliert das Verhalten einer Photovoltaikanlage als Effekt von Quadrilliarden von einzelnen Atomen.

Die Ingenieurmathematik stellt einen Werkzeugkasten zum Modellieren bereit. Funktionen, Ableitungen und Integrale – wie im vergangenen Semester behandelt – haben sich dafür über Jahrhunderte als extrem hilfreich herausgestellt, um die Natur zu beschreiben und um Maschinen zu konstruieren. Dieses Semester kommen weitere Tools hinzu, um komplexere Systeme zu beschreiben.

2 Numerik

Ein wesentlicher Aspekt jedes Werkzeugs der Ingenieurmathematik ist immer die Numerik – die Wissenschaft, mit vertretbarem Rechenaufwand tatsächlich etwas in der benötigten Genauigkeit auszurechnen. (Man erlaubt Abweichungen vom korrekten Resultat, um *überhaupt* ein Resultat zu erhalten!)

Beispiel:

3 Komplexe Zahlen

Hatten wir schon!

4 Lineare Algebra

„Lineare Algebra“ ist ein großes Wort für die Lehre von den Vektoren und Matrizen. Dafür gibt es zwei große Anwendungsgebiete:

- Analytische Geometrie in zwei und drei Dimensionen:

- Analyse von (näherungsweise?) linearen Systemen in Dutzenden bis Hunderttausenden von Dimensionen:

Die dazugehörige Numerik befasst sich vor allem mit großen linearen Gleichungssystemen. Dafür gibt es viele fertige in Software verfügbare Standardmethoden. Wir sehen uns einige der grundlegenden Probleme und Ideen an, um einen Eindruck zu gewinnen, worauf man bei der Wahl einer Lösungsmethode achten sollte.

5 Dynamische Systeme

Ein „dynamisches System“ ist beschrieben durch einen Anfangszustand und eine Regel, wie sich der Zustand im Zeitverlauf entwickelt. Beispiele für dynamische

Systeme, die für regenerative Energien wichtig sind:

Dynamische Systeme verhalten sich nicht immer so, wie man das dumm erwartet. Das einfachste Beispiel für ein dynamisches System mit überraschenden Eigenschaften ist die „logistische Abbildung“. Hier ist der Zustand eine Zahl $x \in [0,1]$. Der Zustand x ändert sich von einem Zeitpunkt zum nächsten gemäß $x \mapsto 4x(1-x)$. Das Interessante an diesem System ist, dass selbst kleinste Abweichungen in x schnell zu großen Abweichungen anwachsen: „deterministisches Chaos“. Um langfristige Vorhersagen zu machen, müsste man den Anfangswert absurd genau messen. Solche Effekte versucht man in technischen Systemen zu verhindern – oder auch gezielt zu nutzen.

Die meisten technisch interessanten dynamischen Systeme werden durch Differentialgleichungen beschrieben, also Gleichungen, welche Ableitungen enthalten, zum Beispiel:

Die Lösungen solcher Gleichungen sind keine einzelnen Zahlenwerte, sondern komlette Bahnkurven, Signalverläufe und so weiter.

Die meisten Simulationen und die meisten Steuer- und Regelprozesse fußen auf Differentialgleichungen. Deshalb sind Differentialgleichungen ein großes

Kapitel dieses Moduls. Praktische relevante Differentialgleichungen lassen sich praktisch nur per Rechner (angenähert) lösen: Dies ist der numerische Aspekt der Differentialgleichungen. Hier soll es wieder nur darum gehen, fundierte Ideen zu entwickeln, wie man Lösungssoftware einsetzt und wo Probleme drohen.

6 Potenzreihen

Mit Hilfe von Tangentengeraden kann man viele Funktionen vereinfacht behandeln. Oft krümmt sich eine Funktion zu schnell von der Tangentengerade weg, dann sind Schmiegeparabeln oder noch weitergehende Näherungen gefragt. Im sozusagen unendlicher Näherung entsteht eine Potenzreihe, zum Beispiel die für den Sinus:

Viele wichtige Funktionen lassen sich praktisch nur über Potenzreihen bestimmen, darunter sin und exp. Insofern sind Potenzreihen wichtig für die Numerik. Nebenbei kann man so die Eulersche Identität $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ zeigen. In der Anwendung helfen Potenzreihen auch, Differentialgleichungen näherungsweise zu lösen.

7 Fourier-Transformation

Fourier-Reihe und Fourier-Transformation sind Methoden, um Funktionen in sinusförmige Teilwellen zu zerlegen. Sinusförmige Schwingungen sind *die* natürlichen Schwingungen, was das Rechnen vereinfacht.

Mit der Fourier-Reihe kann zum Beispiel Störungen der Netzspannung untersuchen:

oder den Tagesgang von Klimadaten modellieren:

Die Wirkung von Filtern wird meist für Sinuswellen gemessen. Per Fourier-Transformation kann man dann sagen, was mit allgemeinen Schwingungen passiert:

8 Funktionen mehrerer Unabhängiger

Die meisten pratisch relevanten Größen hängen nicht von einer einzigen Variablen ab, sondern gleich von mehreren. Deshalb untersucht man Funktionen *mehrerer* Variabler. Beispiele solcher Funktionen, die für regenerative Energien wichtig sind:

Wir sehen uns an, was Ableitung und Integral für solche Funktionen bedeuten:

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale sind dabei Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Sie ergeben sich bei den regenerativen Energien zum Beispiel, indem man dem Sonnenstand folgt. Ein einfaches Beispiel ist die Berechnung der Fläche einer Kreisscheibe mit dem Radius R:

Ableitungen in mehreren Dimensionen sind nötig, um zu bestimmen, wie sich (Mess- und Schätz-)Fehler in komplizierteren Formeln wie $a^2 \sin(b)$ auf das Ergebnis auswirken. Außerdem kann man in mehreren Dimensionen mit Hilfe von Ableitungen nach Extremwerten suchen, um den optimalen Arbeitspunkt für eine Maschine zu finden.