Seminar 5

Mathematik II für Regenerative Energien

Jörn Loviscach

Versionsstand: 11. Mai 2009, 18:16

1. Die 2×2-Drehung um $+90°$ um den Ursprung hat offensichtlich keine *reellen* Eigenwerte. Hat sie aber komplexe Eigenwerte? Und was wären Eigenvektoren dazu?

2. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8/5 & 7/5 & -4/5 \\ -6/5 & 6/5 & -7/5 \end{pmatrix}$$

und geben Sie für jeden der Eigenwerte einen Eigenvektor an. Hinweis: Einer der Eigenwerte ist 1.

3. Wo tauchen die Determinante und die Spur der Matrix A der vorigen Aufgabe in deren charakteristischem Polynom auf? Wie lässt sich dieses Polynom mit den Eigenwerten = Nullstellen als Produkt von Linearfaktoren schreiben? Was ist also das Produkt der Eigenwerte und was ist die Summe der Eigenwerte?

4. Überzeugen Sie sich, dass die Eigenrichtungen der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

senkrecht zueinander sind. Schreiben Sie diese Matrix mit Hilfe einer Drehungsmatrix, der dazu inversen Drehungsmatrix und einer Diagonalmatrix.

5. Betrachten Sie die Menge der einmal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $x \in [0,1]$, die an $x = 0$ und $x = 1$ den Wert 1 haben. Welche dieser Funktionen werden zu einem Vielfachen von sich, wenn man sie einmal ableitet? (Anleitung, wenn Differentialgleichungen noch nicht bekannt: Setzen Sie zum Beispiel $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ mit festen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ an. Welche Bedingungen müssen die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ erfüllen? Hinweis: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = e^x$.)