Mathematik II für Regenerative Energien

Klausur vom 21. September 2009

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. September 2009, 21:15

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunkzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: vier einseitig oder zwei doppelseitig beschriftete Blätter Formelsammlung beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Taschenrechner oder Computer; kein Skript; keine andere Formelsammlung.

Name	Vorname	Matrikelnummer	E-Mail-Adresse, falls nicht in rge0809-Liste

Fingerübungen

1. Schreiben Sie das Polynom $2z^2+4z+6$ in der Form $a(z-b)(z-c)$ mit geeigneten Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$.

2. Im $\mathbb{R}^2$ sind ein Kreis und eine Gerade gegeben. Der Kreis hat den Mittelpunkt $M(1|2)$ und den Radius 3. Die Gerade verläuft durch die Punkte $A(1|1)$ und $B(3|2)$. Schneiden sich Kreisline und Gerade? Wenn ja, in welchen Punkten? Rechnen, nicht aus einer Skizze ablesen!

3. Jeder Punkt $(x|y)$ des $\mathbb{R}^2$ werde um $+90°$ um den Punkt $(1|2)$ gedreht und danach um 3 Einheiten nach links und 4 Einheiten nach unten verschoben. Schreiben Sie die gesamte Abbildung in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}.$$

4. Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades (= Schmiegeparabel) für die Funktion $f(x) := \sin(x^2)$ bei Entwicklung an der Stelle $x_0 = \sqrt{\pi}$ an.

5. Finden Sie eine *spezielle* Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y \stackrel{!}{=} \sin(3x)$ (Lösung nicht eindeutig).

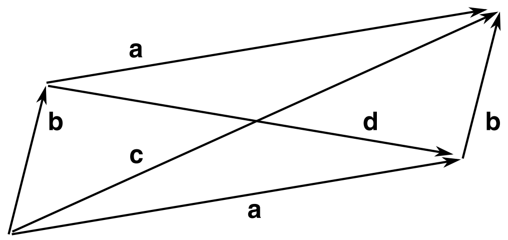
6. Finden Sie durch Trennung der Variablen die Lösung der Differentialgleichung $y' \stackrel{!}{=} y\sqrt{x+2}$ zur Anfangsbedingung $y(3) \stackrel{!}{=} 5$.

Bitte wenden!

Kreative Anwendung

7. Geben Sie zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ an, die keine Punkte gemeinsam haben. Verwenden Sie die Punkt-Richtungs-Form, um die Ebenen anzugeben (keine eindeutige Lösung).

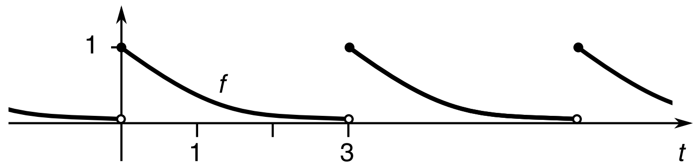
8. Zwei Vektoren **a** und **b** spannen ein Parallelogramm im $\mathbb{R}^2$ auf. Die Vektoren **c** und **d** sind dessen Diagonalen. Weisen Sie allgemein nach: $2\|\mathbf{a}\|^2+2\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2+\|\mathbf{d}\|^2$. Drücken Sie dazu **c** und **d** mit **a** und **b** aus und führen Sie die Längen auf Skalarprodukte zurück.



9. Geben Sie eine 2×2-Matrix an, welche den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 und obendrein den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3 hat.

10. Finden Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine *spezielle* Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung $y\,y'' = x^4$ (Lösung nicht eindeutig).

11. Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten b_4 für die Funktion f, welche die Periode 3 hat und für $0 \le t < 3$ durch $f(t) := e^{-t}$ gegeben ist. Fassen Sie das Ergebnis nach der Integration *nicht* weiter zusammen. Hinweis: Drücken Sie den Sinus mit $e^{i\cdots}$ aus.



12. In die Funktion $f(x,y) := \left(x^2+y\right)^3$ werden gemessene Werte x und y eingesetzt. Der Wert x ist im Mittel gleich 1 mit einer Standardabweichung von 0,01. Der Wert y ist im Mittel gleich 2 mit einer unbekannten Standardabweichung. Die Abweichungen in x und y seien unkorreliert. Welche Standardabweichung hat der Funktionswert $f(x,y)$ dann mindestens? Hinweis: Die Aufgabe lässt sich lösen, ohne dass man 27^2 oder 54^2 tatsächlich ausrechnet.