Mathematik II für Regenerative Energien

Klausur vom 6. Juli 2009

Jörn Loviscach

Versionsstand: 6. Juli 2009, 13:03

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunkzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: vier einseitig oder zwei doppelseitig beschriftete Blätter Formelsammlung beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Taschenrechner oder Computer; kein Skript; keine andere Formelsammlung.

Name	Vorname	Matrikelnummer	E-Mail-Adresse, falls nicht in rge0809-Liste

Fingerübungen

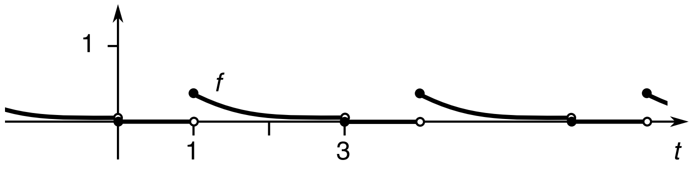
1. Im $\mathbb{R}^3$ sind eine Gerade und eine Ebene gegeben: die Gerade durch die Punkte $A(3|2|1)$ und $B(1|0|1)$ und die Ebene durch die Punkte $C(1|1|1)$, $D(2|1|1)$ und $E(1|4|2)$. Schneiden sich Gerade und Ebene? Wenn ja, wo?

2. Der $\mathbb{R}^2$ werde an der x-Achse gespiegelt (also von oben nach unten geklappt) und danach um $+90°$ um den Ursprung gedreht. Schreiben Sie die gesamte Abbildung (erst spiegeln, dann drehen) als eine einzige Matrix.

3. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' \overset{!}{=} y$ zu der Anfangsbedingung $y(0) \overset{!}{=} 1$, $y'(0) \overset{!}{=} 0$.

4. Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades (= Schmiegeparabel) für die Funktion $f(x) := x^{3/2}$ bei Entwicklung an der Stelle $x_0 = 5$ an.

5. Bestimmen Sie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_5 für die Funktion f, welche die Periode 3 hat, für $0 \leq t < 1$ gleich 0 ist und für $1 \leq t < 3$ durch $f(t) := e^{-t}$ gegeben ist.

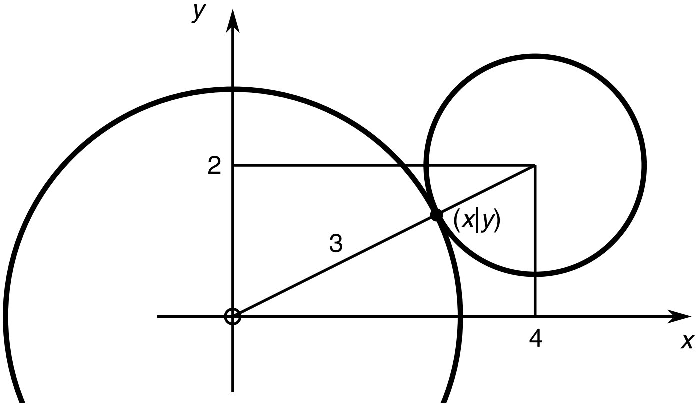


6. Die Funktion $f(x,y) := x^3 - x^2 + y^2 + 2xy - 5x - 6y$ hat an $(x|y) = (1|2)$ ein lokales Minimum. Weisen Sie das nach. Hinweis: 3 ist größer als $\sqrt{5}$.

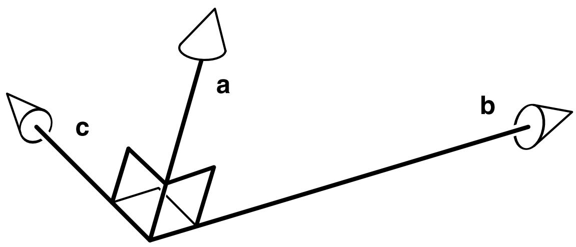
Kreative Anwendung

7. Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, die $z^3+z=0$ erfüllen. Vorüberlegung: Wie viele verschiedene Lösungen kann diese Gleichung maximal haben?

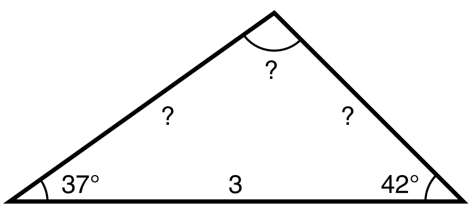
8. Im $\mathbb{R}^2$ seien zwei Kreise gegeben: Der erste Kreis hat den Mittelpunkt $(0|0)$ und den Radius 3; der zweite Kreis hat den Mittelpunkt $(4|2)$ und einen nicht angegebenen Radius. Beide Kreise berühren sich, siehe Skizze. Berechnen Sie (Nicht einfach nur aus der Skizze ablesen!) den Punkt $(x|y)$, an dem sie sich berühren.



9. Gegeben ist der Vektor $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie zwei Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ im $\mathbb{R}^3$, so dass jeder der drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ senkrecht zu den jeweils beiden anderen ist. Keiner soll der Nullvektor sein. (Lösung nicht eindeutig)



10. In einem Dreieck habe eine Seite die Länge 3 und die beiden anderen Seiten bilden mit dieser Seite Innenwinkel von 37° und 42°, siehe Skizze. Berechnen Sie die Längen der beiden anderen Seiten.



11. Finden Sie eine *spezielle* Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + y = x^3$. (Lösung nicht eindeutig)

12. Finden Sie durch Trennung der Variablen die Lösung der Differentialgleichung $y' \stackrel{!}{=} y\cos(x)$ zur Anfangsbedingung $y(3) \stackrel{!}{=} -5$ (Achtung: *minus* 5).