

Mathematik und Physik

Jörn Loviscach
6. Februar 2009

Dauer: 90 Minuten

Punktzahl: maximal 27, mindestens 11

Hilfsmittel: Formelsammlung (maximal drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname
Matrikelnummer	E-Mail-Adresse, falls nicht in Semester-Mailingliste

1. Gegeben sei die Kurve $\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ (t^2 - 4)(t - 3) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Diese Kurve läuft zweimal durch den Ursprung. Schneidet sie sich dort *senkrecht* mit sich selbst? Rechnerische Lösung! 3 P.
2. Berechnen Sie die Tangentengerade an die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + xy = 19\}$ durch den Punkt $(2, 1)$ dieser Menge. 3 P.
3. Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt (d. h. den Mittelpunkt des Schmiegekreises) der Kurve $\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ an $t = 2$. 3 P.
4. Es sei für eine Bézier-Kurve der Anfangspunkt $\vec{a} = (0, 0)$ und der Endpunkt $\vec{d} = (1, 0)$ gegeben. Bestimmen Sie die übrigen Steuerpunkte \vec{b} und \vec{c} der Kurve so, dass sie durch den Punkt $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ läuft (keine eindeutige Lösung). 3 P.
5. Bestimmen Sie die (quadratische) Schmiegeparabel an die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ an der Stelle $x_0 = 0$. 3 P.
6. Geben Sie eine Iterationsformel an (Newton), mit der man eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^3 = \cos(x)$ finden kann. 3 P.
7. Karussellfahrt: Ein Körper bewegt sich auf einer Kreisbahn mit sechs Metern Radius um den Ursprung in der xy -Ebene; er fliegt gegen den Uhrzeigersinn und umrundet das Zentrum alle drei Sekunden; zum Zeitpunkt $t = 0$ s ist er beim Punkt $(6 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor in Abhängigkeit von der Zeit t . 3 P.
8. Ein winziges Glühwürmchen fliegt im Abstand von 20 cm vor der Mitte einer Sammellinse der Brennweite 5 cm und des Durchmessers 1 cm. Auf einem Film 2 cm hinter der Linse wird das Glühwürmchen als unscharfer Fleck abgebildet. Wie groß ist der Durchmesser des Flecks? 3 P.
9. Eine Verstärkeranlage wird von 500 Watt auf 20.000 Watt aufgerüstet. Wie viel Dezibel mehr Schalldruck sind dadurch zu erreichen? 3 P.