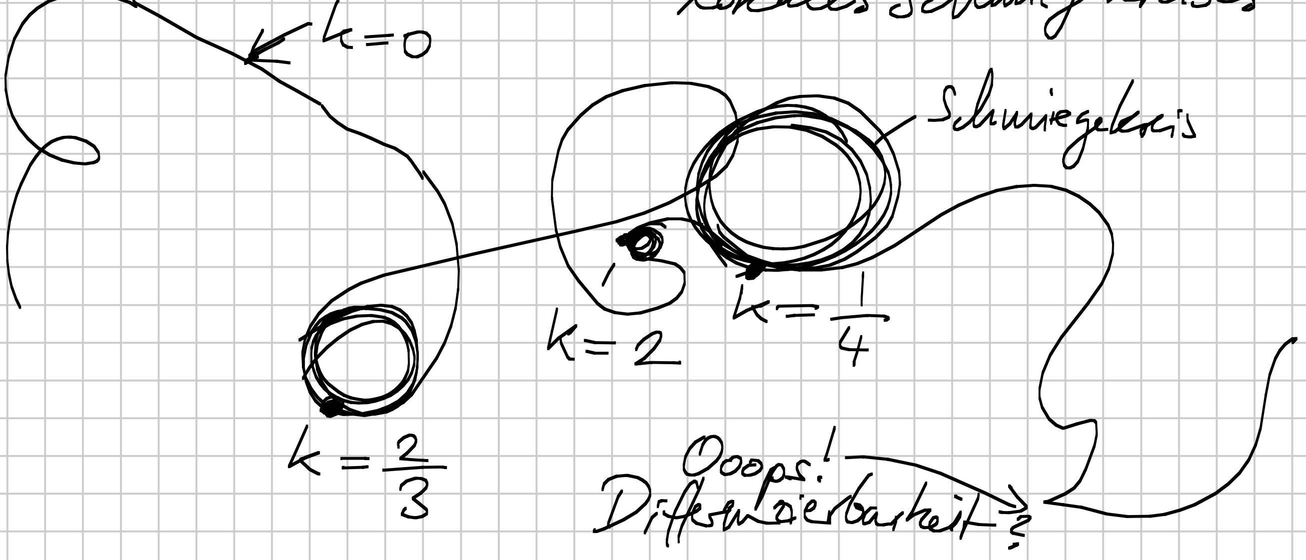
Krümmung

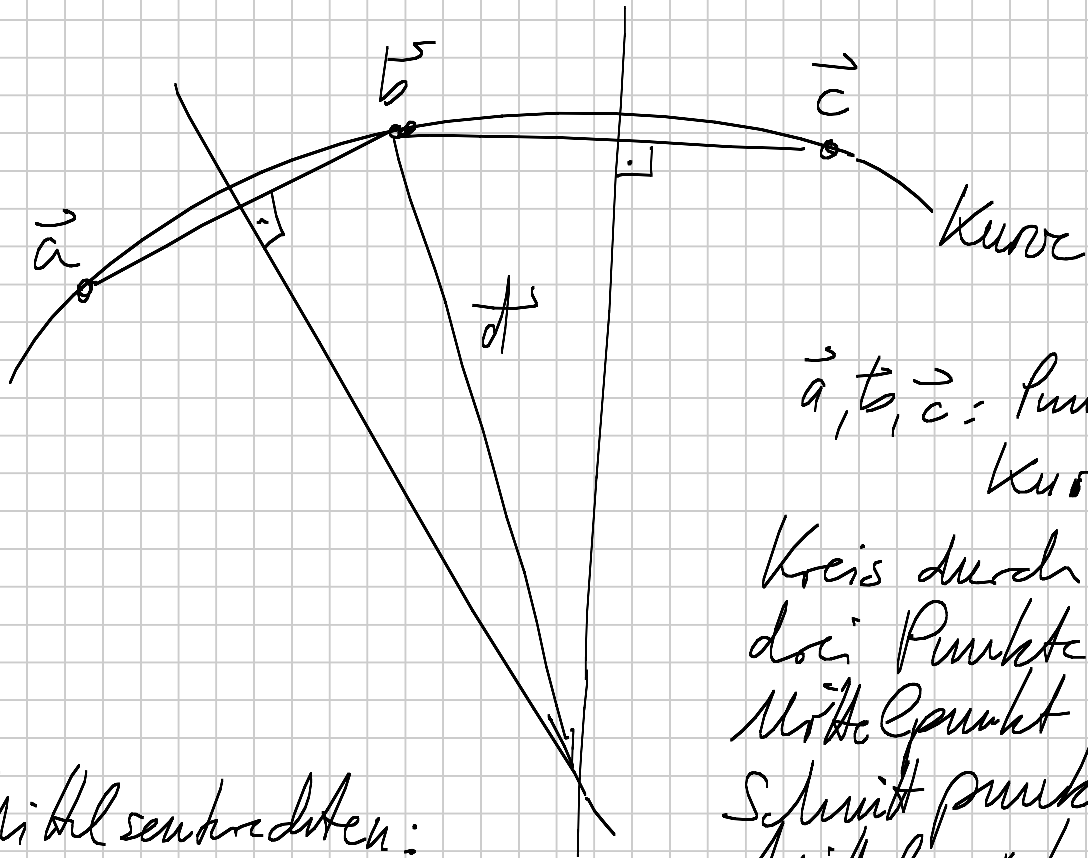
Kurven III-1

- Eigenschaft jedes Punkts einer Kurve, unabhängig von Parametrisierung
- Kreis soll konstante Krümmung haben, ein n-mal größerer Kreis soll $\frac{1}{n}$ der Krümmung haben

Also: Krümmung $:= \dfrac{1}{\text{Radius des lokales Schmiegekreises}}$ bzw. 0



Näherung des Schmiegekreises im $\mathbb{R}^2$



$\vec a, \vec b, \vec c$: Punkte auf Kurve

Kreis durch diese drei Punkte hat Mittelpunkt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

$k \approx \frac{1}{|\vec d|}$

Mittelsenkrechten:

- $\frac{\vec a + \vec b}{2} + \lambda R_{90}(\vec b - \vec a)$
- $\frac{\vec b + \vec c}{2} + \mu R_{90}(\vec c - \vec b)$

Drehung um 90°

Schnittpunkt: $\frac{\vec c - \vec a}{2} = \lambda R_{90}(\vec b - \vec a) - \mu R_{90}(\vec c - \vec b)$

Bilde Skalarprod. mit $\vec c - \vec b$:

$$\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = \lambda\,(\vec{c}-\vec{b})\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\,\frac{(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}{(\vec{c}-\vec{b})\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a})}$$ (Nenner $\neq 0$?)

Also Schnittpunkt =

$$\vec{b}+\vec{d} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}{(\vec{c}-\vec{b})\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a})}\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} + \frac{1}{2}\ \text{—— " ——— " —}\ .$$

Was passiert, wenn wir wählen

$\vec{a} = \vec{p}(t-\Delta t)$, $\vec{b} = \vec{p}(t)$, $\vec{c} = \vec{p}(t+\Delta t)$

und Δt gegen 0 gehen lassen?

(keine strenge Herleitung, nur Idee)

$\vec{b}-\vec{a} \approx \Delta t \cdot \vec{p}\,'(t)$, $\vec{c}-\vec{b} \approx \Delta t \cdot \vec{p}\,'(t)$,

$\vec{c}-\vec{a} \approx 2\Delta t \cdot \vec{p}\,'(t)$

$(\vec{a}-\vec{b}) \perp ?$

$$(\vec{c}-\vec{b})\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a}) = \underbrace{(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})}_{(\Delta t)^2\cdot\vec{p}\,''(t)}\cdot R_{90}(\vec{b}-\vec{a})$$

Also insgesamt:

$$\vec{d} \approx -\cancel{\frac{\Delta t}{2}\vec{p}'(t)} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{\Delta t} \cdot \vec{p}'(t) \cdot \cancel{2\Delta t}\,\vec{p}'(t)}{\cancel{(\Delta t)^2} \cdot \vec{p}''(t) \cdot R_{90}\,\cancel{\Delta t}\,\vec{p}'(t)} \cdot R_{90}\,\cancel{\Delta t}\,\vec{p}'(t)$$

$$\approx \frac{|\vec{p}'(t)|^2}{\vec{p}''(t) \cdot R_{90}\,\vec{p}'(t)} \cdot R_{90}\,\vec{p}'(t)$$

Damit kann man die Lage des Mittelpunkts ausrechnen. Meist interessiert nur die Krümmung:

$$k(t) = \frac{1}{|\vec{d}(t)|} = \frac{|\vec{p}''(t) \cdot R_{90}\,\vec{p}'(t)|}{|\vec{p}'(t)|^3}$$

$$= \frac{|-x''(t)\,y'(t) + y''(t)\,x'(t)|}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}^{\,3}}.$$

Wenn man die Betragsstriche im Zähler weglässt, kann man links/rechts unterscheiden.

Dann bleibt $k(t) = \dfrac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.

Für Kurven in 3D gilt:

$$k(t) = \frac{|\vec{p}\,'(t) \times \vec{p}\,''(t)|}{|\vec{p}\,'(t)|^3},$$

was auch die logische Verallgemeinerung von Kurven des Typs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ auf allgemeine Kurven im $\mathbb{R}^3$ ist.