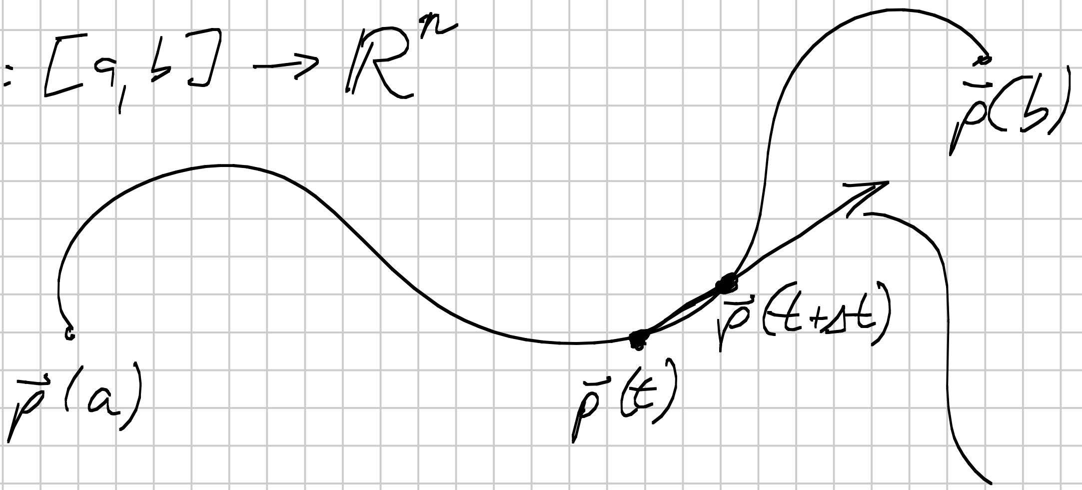
Kurven II - 1

Notiztitel 15.10.2007

Ableitung von Kurven:

Geschwindigkeitsvektor

$\vec{p} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

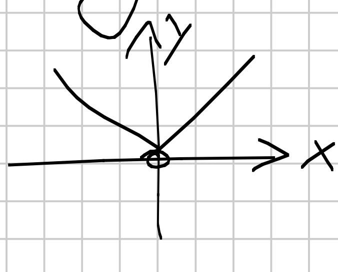



$$\vec{p}\,'(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t}$$

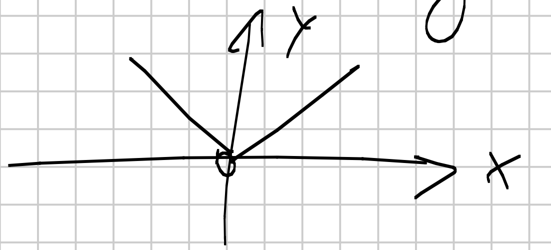
gibt uns die Geschwindigkeit und die Richtung der Kurve.

Allerdings muss die Ableitung nicht immer existieren:

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$



Aber dies gilt sogar, wenn die Ableitung für alle $t$ existiert:



Wie?

Moral: Der Geschwindigkeitsvektor hängt von der Parametrisierung ab. Allerdings ist seine Richtung immer dieselbe (bis auf vorwärts/rückwärts), es sei denn, seine Länge ist null.

Was ist die Tangentengerade an den Punkt $\vec{p}(t)$ der Helix

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ t \end{pmatrix} \quad ?$$

Wenn man die Geschwindigkeit weiß, kann man durch Integration die zurückgelegte Strecke bestimmen, also die Länge der Kurve (Bogenlänge, arc length).

Länge der Kurve zwischen $t = a$ und $t = b$ : $\int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$.

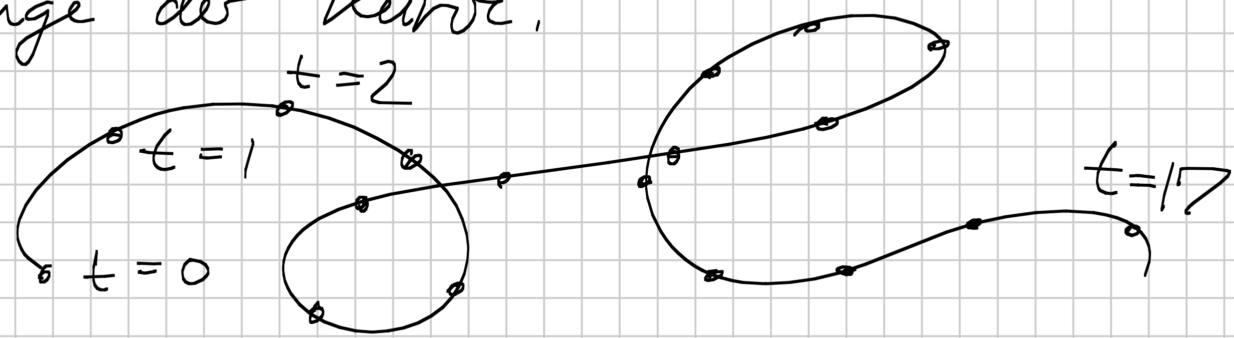
Das Ergebnis hängt nicht von der Parametrisierung ab!

- Wie lang ist der Einheitskreis?

- Wie lang ist die Normalparabel zwischen $x = 0$ und $x = 3$ ?

# Parametrisierung nach der Bogenlänge

Um Muster gleichmäßig anzuordnen, Animationen gleichmäßig fliegen zu lassen oder Pinselkleckse lückenlos zu setzen ist sinnvoll, mit einer Geschwindigkeit von 1 über die Kurve zu fahren. D.h. $t$ misst direkt die Länge der Kurve.




Zu einer gegebenen parametrisierten Kurve $s \mapsto \vec{p}(s)$ muss man also haben: $t(s_1) \overset{*}{=} \int_{s_0}^{s_1} |\vec{p}\,'(s)|\,ds \quad \forall s_1$

Nun will man aber nicht $t$ ausrechnen, sondern umgekehrt $t$ vorgeben und daraus $s$ und daraus $\tilde{p}$ bestimmen. Dazu muss man die Gleichung $*$ nach $s_1$ auflösen. Das klappt eher selten analytisch. Einfachste Alternative: Eine Tabelle

| $s_1$ | $t$ |
|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ |

anlegen und die $s_1$-Werte durch Interpolation zu einem gegebenen $t$ finden.