Hausaufgaben - Blatt 1

1) Zeige, dass in jedem Vektorraum folgende Aussage gilt:

$$c\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \vee \quad \vec{x} = \vec{0}.$$

Dabei dürfen nur die Vektorraumaxiome und die in der Vorlesung behandelten Eigenschaften $0\vec{x} = \vec{0}$ und $c\vec{0} = \vec{0}$ benutzt werden.

2) Zeige, dass für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ immer gilt:

$$\left|c\vec{x}\right| = |c| \left|\vec{x}\right|.$$

3) Für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt immer

$$\left|\vec{x} + \vec{y}\right|^2 + \left|\vec{x} - \vec{y}\right|^2 = 2\left(\left|\vec{x}\right|^2 + \left|\vec{y}\right|^2\right).$$

Versuche, im $\mathbb{R}^2$ eine möglichst einfache geometrische Interpretation für diese Formel zu finden. Hinweis: Diese Gleichung heißt nicht ohne Grund *Parallelogrammgleichung*. (Wer möchte, kann die Gültigkeit dieser Gleichung anhand der Definition des Betrages nachprüfen. Das ist zwar eine eher mühsame Fleißarbeit, bei Beschränkung auf den Fall $n = 2$ aber vielleicht ganz lehrreich.)