

## Komplexe Zahlen

### 1. Definition der komplexen Zahlen

Ziel: neuerliche Zahlbereichserweiterung, so dass auch Quadratwurzeln aus negativen Zahlen gezogen werden können (in  $\mathbb{R}$  nicht möglich!).

Vorgehensweise: Man definiert ein Symbol  $i$  ("imaginäre Einheit"), dem man die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

zuschreibt. Die Menge

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

mit den Rechenoperationen

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i \quad (\text{Addition})$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (\text{Multiplikation})$$

heißt dann die *Menge der komplexen Zahlen*.

### 2. Bemerkungen

- (1) Die Multiplikationsformel ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Klammern, Ersetzen von  $i^2$  durch  $-1$  und Sortieren.
- (2) Da man jedes  $a \in \mathbb{R}$  schreiben kann als  $a + 0i$ , ist offenbar  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .
- (3) Man kann sich überzeugen, dass für die so definierten Operationen (Addition und Multiplikation) in  $\mathbb{C}$  dieselben Rechenregeln gelten, wie man sie aus  $\mathbb{R}$  gewohnt ist.
- (4) Die von  $\mathbb{R}$  gewohnte *Ordnung* (d. h. die Vergleichbarkeit bzgl.  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$ ) läßt sich jedoch **nicht** sinnvoll auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen! Insbesondere läßt sich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nicht sinnvoll in "positive" und "negative" Zahlen aufteilen. ("Sinnvoll" bedeutet dabei "unter Erhaltung der gewohnten Regeln" wie  $Plus \times Plus = Plus$ ,  $Plus \times Minus = Minus$ , ...)

### 3. Bezeichnungsweisen

- Für ein  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  heißt  $a$  der "Realteil" und  $b$  der "Imaginärteil" von  $z$ , geschrieben:  $\operatorname{Re}(z) = a$ ,  $\operatorname{Im}(z) = b$ . (Bitte nicht verwirren lassen: der Imaginärteil ist **nicht** etwa der Wert  $bi$ , sondern wirklich nur die **reelle Zahl**  $b$ .)
- Ist  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , so heißt  $\bar{z} = a - bi$  der zu  $z$  "konjugiert komplexe" Wert. Man beachte, dass sowohl
 
$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{als auch}$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$
 also stets reell sind!
- Eine komplexe Zahl  $z$ , deren Realteil 0 ist, heißt "rein imaginär".

### 4. Bemerkung zur Verwendung von Wurzelsymbolen

Aufgrund der Eigenschaft (4) unter Pkt.2 ist es in  $\mathbb{C}$  besonders schwierig, eindeutige Wurzelsymbole zu definieren. In  $\mathbb{R}$  wird bekanntlich vereinbart, dass man unter  $\sqrt{a}$  diejenige **positive** reelle Zahl verstehen will, deren Quadrat  $a$  ist. Die entsprechende Regelung in  $\mathbb{C}$ , mit der festgelegt wird, ob man (z. B.) unter  $\sqrt{-3 - 4i}$  den Wert  $1 - 2i$  oder den Wert  $-1 + 2i$  verstehen will, ist schon deutlich komplizierter und wird daher nicht weiter behandelt. Speziell für Quadratwurzeln aus negativ-reellen Zahlen besagt diese Regel etwa, dass der Imaginärteil positiv sein muss, d. h. es ist  $\sqrt{-1} = i$  (und nicht etwa  $-i$ ). Für dritte, vierte und höhere Wurzeln werden die entsprechenden Konventionen dann immer komplizierter. Grundsätzlich sollte man daher die Verwendung von Wurzelsymbolen für komplexe Radikanden möglichst ganz vermeiden bzw. den einschlägigen Experten überlassen.

## 5. Umkehroperationen

Subtraktion klar, Division:

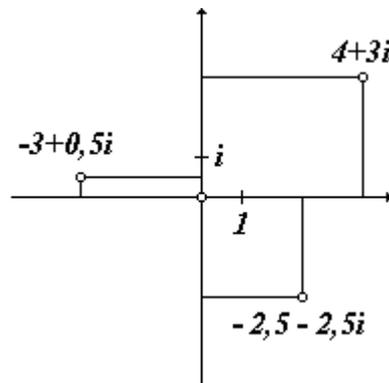
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(Merkregel: Nenner reell machen durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert.)

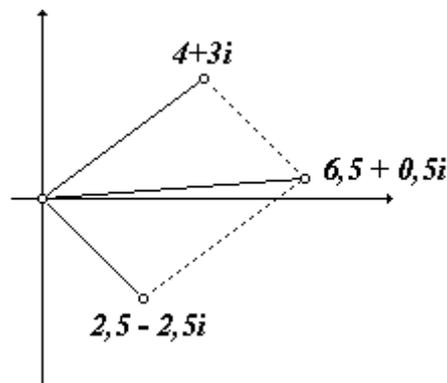
[numerisches Beispiel]

## 6. Geometrische Veranschaulichung

Da jede komplexe Zahl durch ein **Paar** reeller Zahlen beschrieben wird (Real- und Imaginärteil), kann man den  $\mathbb{R}^2$  zu einer graphischen Darstellung der Menge  $\mathbb{C}$  benutzen. Üblicherweise wird der Realteil in  $x$ -Richtung aufgetragen ("reelle Achse") und der Imaginärteil in  $y$ -Richtung ("imaginäre Achse"). Diese Darstellung nennt man auch die "komplexe Ebene" oder "Gaußsche Zahlenebene":



Da die Addition zweier komplexer Zahlen darin besteht, dass Real- und Imaginärteile jeweils für sich addiert werden (siehe oben), kann man diese Addition auch einfach geometrisch nachvollziehen (Diagonale im Parallelogramm).



(Für Leute, die sich mit Vektorrechnung bereits auskennen: das ist genau die Vektoraddition im  $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$  nächstes Semester!) Auch das Produkt zweier reeller Zahlen lässt sich in der komplexen Ebene elementargeometrisch konstruieren. Da diese Konstruktion jedoch recht kompliziert ist und auch keine große praktische Bedeutung hat, gehen wir darauf nicht weiter ein. (Weiter unten folgt aber eine geometrische Veranschaulichung des Produkts.)

## 7. Der Betrag einer komplexen Zahl

Für reelle Zahlen besteht die Berechnung des "Betrages" (genauer: Absolutbetrag) einfach im Weglassen eines ggf. vorhandenen negativen Vorzeichens:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Dies lässt sich nicht direkt auf komplexe Zahlen übertragen. Interpretiert man den Betrag jedoch als (positiv gemessenen) Abstand zum Nullpunkt der Zahlengeraden, so kann man dies für komplexe Zahlen einfach zum "Abstand vom Ursprung der komplexen Ebene" verallgemeinern:

$$z = a + bi \in \mathbb{C}: |z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}.$$

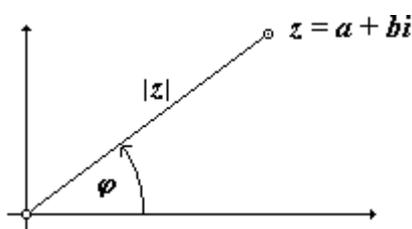
Für beliebige  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Das erste (die sogenannte "Dreiecksungleichung") ist eine geometrische Eigenschaft des  $\mathbb{R}^2$  (siehe nächstes Semester), das zweite lässt sich direkt nachrechnen (siehe Hausaufgabe).

## 8. Polarkoordinatendarstellung

Zeichnet man in der komplexen Ebene den Strahl vom Ursprung zu einem Punkt  $z = a + bi$  ein, so hat dieser die Länge  $|z|$ . Außerdem kann man den Winkel von der positiven reellen Achse bis zu diesem Strahl messen. Dieser heißt das "Argument" von  $z$ , geschrieben  $\arg(z)$ . (Dass an dieser Stelle das Wort "Argument" benutzt wird, das auch sonst häufig und in ganz anderer Bedeutung auftritt, ist zwar unschön, hat sich aber leider so eingebürgert.)



Auch durch das Zahlenpaar "Betrag und Argument" lässt sich jede komplexe Zahl eindeutig darstellen, wenn man festlegt, dass das Argument immer im Bereich  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$  liegen soll (bzw.  $0 \leq \varphi < 2\pi$  im Bogenmaß). Verletzt ist die Eindeutigkeit allerdings für  $z = 0$ , da dieser Wert bereits allein durch die Eigenschaft  $|z| = 0$  charakterisiert ist, während  $\arg(0)$  unbestimmt ist.

Ist  $z$  eine komplexe Zahl mit dem Betrag  $|z|$  und dem Argument  $\arg(z) = \varphi$ , so gilt:

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos \varphi, \quad \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \varphi,$$

$z$  lässt sich also schreiben als

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

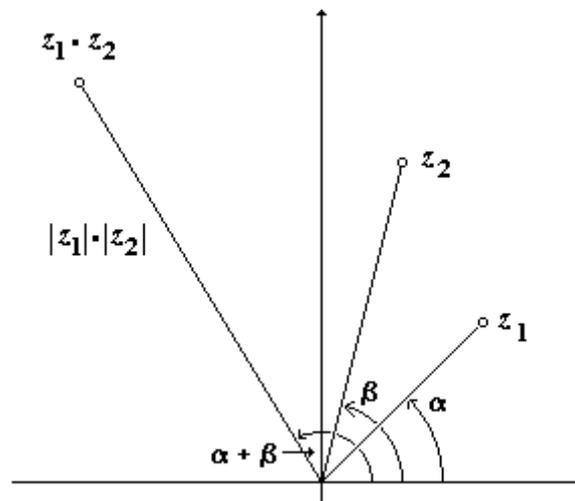
Dies ist die sogenannte "Polarkoordinatendarstellung" einer komplexen Zahl. Von der umgekehrten Umrechnung, d. h. der Ermittlung von Betrag und Argument einer durch Real- und Imaginärteil gegebenen komplexen Zahl  $z = a + bi$ , kennen wir den ersten Teil bereits:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Die Berechnung des Arguments erfolgt im Prinzip nach der Formel

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a},$$

wobei die übliche Arcustangens-Funktion allerdings immer nur Werte zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  liefert. Je nach den Vorzeichen von  $a$  und  $b$  muss man also ggf. noch  $180^\circ$  oder  $360^\circ$  addieren, um im richtigen Quadranten zu landen.

Für die Addition komplexer Zahlen ist die Polarkoordinatendarstellung eher ungeeignet. Die Multiplikation wird dagegen besonders einfach. Wir wissen bereits, dass für den Betrag von  $z_1 \cdot z_2$  gilt:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ . Und für das Argument erhält man (unter Benutzung der trigonometrischen Additionstheoreme):  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ . Dies liefert die versprochene geometrische Veranschaulichung der Multiplikation in der komplexen Ebene: "addiere die Winkel und multipliziere die Beträge" (siehe Skizze).



Betrachtet man speziell eine komplexe Zahl  $z$  mit  $|z| = 1$ , so läßt sich diese also in der Form

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{mit } \varphi = \arg(z))$$

schreiben. Für die Potenzen von  $z$  gilt dann also:

$$z^2 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

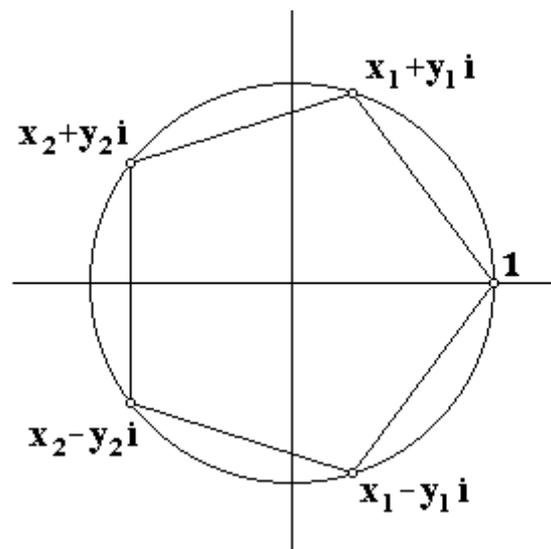
...

$$z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Letzteres ist die sogenannte "Formel von Moivre". (Wenn man für ein festes  $n$  die linke Seite nach dem binomischen Satz ausmultipliziert und dann Real- und Imaginärteile vergleicht, liefert das die vielleicht bekannten Formeln, mit denen man  $\cos 2\varphi$ ,  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 3\varphi$ ,  $\sin 3\varphi$ , ... jeweils durch  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  ausdrücken kann, vgl. Formelsammlung!)

## 9. Einheitswurzeln

Aus der Moivreschen Formel läßt sich u. a. ableiten, dass die Gleichung  $z^n = 1$  in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Lösungen hat, nämlich die Eckpunkte des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks. (Dabei muss eine Ecke natürlich immer im Punkt 1 auf der reellen Achse liegen.) Diese Lösungen heißen die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Beispiel für  $n = 5$ :



Dabei ist

$$x_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \quad y_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})},$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), \quad y_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}.$$

(Wer möchte, kann als "Fingerübung" gerne nachrechnen, dass mit diesen Werten tatsächlich gilt:  $(x_1 + y_1 i)^2 = x_2 + y_2 i$  und  $(x_1 + y_1 i)^5 = 1$ .)

## 10. Lösung algebraischer Gleichungen

In  $\mathbb{C}$  gilt sogar ganz allgemein, dass jede algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades genau  $n$  Lösungen besitzt (das ist der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*). Eine algebraische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit gegebenen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und einer Unbekannten  $x$ . Anders ausgedrückt: gesucht sind die Nullstellen des links stehenden Polynoms. (Die Koeffizienten können im Prinzip komplexe Zahlen sein. Wir interessieren uns jedoch vorwiegend für den Fall, dass die Koeffizienten noch alle reell sind, lassen aber als Lösungen jetzt auch komplexe Zahlen zu.)

Wir betrachten zunächst den (hoffentlich bekannten) Fall der *quadratischen Gleichungen*. Da bei einer "echten" quadratischen Gleichung

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$a_2 \neq 0$  gelten muss, kann man durch diesen Koeffizienten dividieren und erhält die übliche "p-q-Schreibweise":

$$x^2 + px + q = 0$$

mit der bekannten Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Entscheidend ist der unter dem Wurzelzeichen stehende Wert  $D = \frac{p^2}{4} - q$ , die sogenannte "Diskriminante" der Gleichung. Ist  $D > 0$ , so erhält man zwei (verschiedene) reelle Lösungen. Ist  $D = 0$ , so sind beide Lösungen gleich (sogenannte "doppelte Nullstelle"). Im Falle  $D < 0$  gibt es keine reellen Lösungen, wohl aber ein Paar konjugiert komplexer Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{|D|}.$$

Für Gleichungen dritten und vierten Grades gibt es analoge Lösungsformeln, die allerdings bereits sehr kompliziert sind (Ausdrücke aus ineinander "verschachtelten" zweiten, dritten und ggf. vierten Wurzeln). Bei Gleichungen fünften und höheren Grades ist es dagegen **im allgemeinen** überhaupt nicht mehr möglich, ihre Lösungen durch irgendwelche Wurzelausdrücke darzustellen. (Im konkreten Einzelfall geht es manchmal doch - siehe z. B. die oben angegebenen Lösungen von  $x^5 = 1$ .) Es bleibt dann also nur die numerische Berechnung von Näherungslösungen.

Bemerkung (für Leute, die sich noch an Polynomdivision u. ä. erinnern): Damit man bei einer Gleichung  $n$ -ten Grades wirklich auf **genau**  $n$  Lösungen kommt, muss man sogenannte "mehrfache Nullstellen" entsprechend ihrer Vielfachheit zählen (analog zu den "doppelten" Nullstellen bei quadratischen Gleichungen). Das wird vielleicht klarer, wenn man sich an folgendes erinnert: Ist  $x_0$  Nullstelle eines Polynoms  $p(x)$ , so kann man von  $p$  einen "Linearfaktor abspalten", d. h. es ist  $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ , wobei  $q$  ein Polynom niedrigeren Grades ist (Polynomdivision!). Ist  $x_0$  dann auch noch Nullstelle von  $q$ , so ist es bereits *doppelte* Nullstelle von  $p$  usw. In diesem Sinne läßt sich der Fundamentalsatz der Algebra auch wie folgt formulieren: In  $\mathbb{C}$  läßt sich jedes Polynom vollständig in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen.