

Was ist Mathematik?

Klar: Mathematik ist **nicht**

- Auswendiglernen von Formeln
- Eintippen in den Taschenrechner o.ä.

Aber was dann? - Eine einfache, allgemein anerkannte Definition gibt es nicht!

Mathematik als **eigenständige Wissenschaft** besteht heute (z. B. in Lehrbüchern oder Forschungspublikationen) fast immer aus einer Abfolge

- Definition(en)
- Satz
- Beweis

Zunächst werden irgendwelche mathematischen Objekte definiert und dann deren interne Eigenschaften und Beziehungen untereinander untersucht und bewiesen. (Beispiel: Begriff des "linearen Gleichungssystems" \Rightarrow Sätze über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, über Algorithmen zum zuverlässigen Auffinden aller Lösungen etc.)

Mathematik als **Hilfswissenschaft** für andere Fachgebiete hat dagegen eher den Charakter eines **Werkzeugkastens** voller Hilfsmittel zum Analysieren und Lösen von Problemen.

Der Prozess, bei dem einer konkreten Fragestellung aus einer beliebigen Fachwissenschaft eine (vorhandene oder neu zu erfindende) mathematische Theorie zugeordnet wird, deren Resultate dann die gewünschte Problemlösung möglichst direkt liefern, heißt

"mathematische Modellierung"

und ist von zentraler Bedeutung für alle Mathematik-Anwendungen.

Simplex Beispiel:

Fertiggericht, Zubereitung in der Mikrowelle: "8 Min. bei 600W, bei anderen Leistungen entsprechend länger oder kürzer"; Problem: welche Zeit muss ich bei einem 750W-Gerät einstellen? Mathematisches Modell: "umgekehrte Proportionalität", d. h. das Produkt muss konstant sein; Problemlösung also: $(600 \cdot 8) / 750 = 6,4 \text{ Min.} = 6 \text{ Min. } 24 \text{ Sek.}$

Komplexes Beispiel:

Räumliche Struktur des Universums laut Relativitätstheorie nicht mehr mit der gewohnten dreidimensionalen euklidischen Geometrie beschreibbar \Rightarrow mathematisches Modell "vierdimensionale Differentialgeometrie"

Wichtig: Modellierungen sind ihrem Wesen nach immer nur Näherungen, deren Qualität davon abhängt, wie gut das Modell das "Wesen" der abzubildenden Realität trifft. Bei den klassischen Mathematik-Anwendungen (Physik, Technik etc.) sind diese Näherungen i. a. sehr gut und galten oft sogar als "exakt", bis neue Erkenntnisse eine Ergänzung oder Verfeinerung erforderlich machten. (Typisches Beispiel: Newtonsche Mechanik und Maxwellsche Elektrodynamik wurden in diesem Sinne durch Relativitätstheorie und Quantenphysik "abgelöst".) Bei der Beschreibung ökonomischer, soziologischer oder ökologischer Prozesse durch das mathematische Modell der sogenannten "dynamischen Systeme" ist dieser Näherungscharakter dagegen von vornherein sehr deutlich und geradezu Bestandteil des Ansatzes.

Das Verhältnis zwischen zu beschreibender Realität und mathematischer Modellvorstellung kommt besonders kurz und treffend in dem folgenden bekannten Einstein-Zitat zum Ausdruck:

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Diese "moderne" Einstellung zur Mathematik ist im wesentlichen das Ergebnis der sogenannten "ersten Grundlagenkrise der Mathematik", die durch die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie im 19. Jhd. ausgelöst wurde. Seitdem wird die Mathematik **nicht** mehr unter die Naturwissenschaften gerechnet, sondern beschäftigt sich nur mit ihren eigenen, selbsterschaffenen Objekten, die zunächst keinerlei Bezug auf irgendeine externe "Wirklichkeit" haben. Dieser Bezug entsteht immer erst im Nachhinein durch den beschriebenen Prozess der Modellbildung.

Diese klare Trennung zwischen Mathematik und "eentlichen" Naturwissenschaften hat sich sehr schnell als äußerst fruchtbar erwiesen. Die Mathematiker konnten jetzt ihrer Phantasie freien Lauf lassen und dadurch sind die Chancen, für ein neu auftretendes konkretes Problem ein bereits fertiges und benutzbares mathematisches Modell vorzufinden, oftmals sehr hoch. Bestes Beispiel dafür ist die oben erwähnte vierdimensionale Differentialgeometrie, die von Bernhard Riemann ca. 50 Jahre vor Einstein entwickelt wurde und lange Zeit als Musterbeispiel einer faszinierenden aber nutzlosen Gedankenspielerlei weltfremder Mathematiker galt.

Welche Anforderungen bedeutet das für einen Studenten einer Fachrichtung, in der mathematische Methoden benutzt werden?

- möglichst breiter (wenn auch oberflächlicher) Überblick über die ggf. verfügbaren "Werkzeuge" (sprich: mathematische Objekte und Theorien)
- große handwerkliche Sicherheit im Umgang mit solchen Werkzeugen (Verletzungsgefahr!)
- *Fähigkeit zu selbständiger, effektiver Modellbildung*

Der letzte Punkt ist der wichtigste aber auch der schwierigste, da er eine kontrollierte Kombination von logischer Intelligenz und schöpferischer Phantasie erfordert!

Bemerkungen:

- (1) Da es kaum möglich ist, solche "schöpferische" Tätigkeiten unter Klausurbedingungen zu testen, wird in Klausuren meistens vorwiegend der zweite Punkt geprüft. Dadurch entsteht leicht der Eindruck, diese handwerklichen Fähigkeiten seien das eigentlich (oder sogar einzig) Wichtige an der Mathematikvorlesung, aber das ist ein Irrtum! Für den Gesamterfolg des Studiums ist der dritte Punkt mindestens genauso wichtig, auch wenn er in den Anfangssemestern kaum gezielt geprüft werden kann.
- (2) Es gab auch noch eine zweite Grundlagenkrise der Mathematik, die zum Teil daraus entstand, dass die Mathematiker mit ihrer neuen Freiheit etwas zu sorglos umgingen. Für Interessierte sei nur auf die "Russellsche Antinomie in der Mengenlehre", den sogenannten "Intuitionismus" und schließlich den "Unvollständigkeitssatz" von Kurt Gödel verwiesen. Die Thematik der beiden Grundlagenkrisen läßt sich übrigens auch in einen größeren Zusammenhang philosophischer Fragen der allgemeinen Erkenntnistheorie einordnen, was hier aber natürlich zu weit führen würde. Immerhin sei daran erinnert, dass schon Kant für seine "Kritik der reinen Vernunft" u. a. von der Frage ausgegangen war, wieso man mathematischen (insbesondere geometrischen) Sätzen eine solche "unbedingte" Gültigkeit zuschreiben kann, wie ihn aus bloßer Erfahrung gewonnene Erkenntnisse eigentlich nie besitzen können.

Überblick über einige wichtige Teilgebiete der Mathematik

(siehe Diagramm auf der letzten Seite)

- (1) Zunächst einige allgemeine Begriffserläuterungen:

lineare Algebra	Theorie der Vektorräume, also im Prinzip "Vektorrechnung vom höheren Standpunkt aus"
Funktionentheorie	historisch entstandener Name für die Erweiterung der klassischen Analysis auf komplexe Zahlen

Statistik	nicht nur "beschreibende Statistik" (Mittelwertberechnung etc.), sondern vor allem "beurteilende Statistik" (Aufspüren von Korrelationen, Testen von Hypothesen etc.)
Topologie	allgemeinste Form der Analysis, bei der metrische Eigenschaften (Abstände zwischen Punkten) keine Rolle mehr spielen, sondern nur qualitative Lagebeziehungen ("alle Objekte, die stetig ineinander verformbar sind, sind gleich" \Rightarrow "Gummi-Geometrie")
Numerik	liefert für alle Teile der Mathematik ggf. Näherungsverfahren zu nicht exakt lösbaren Problemen, kümmert sich aber auch bei exakten Algorithmen um korrekte Implementationen, die trotz der Probleme der Maschinenarithmetik (Rundung, Auslöschung etc.) "numerisch stabil" bleiben

- (2) Die unter "Grundlagen der Mathematik" zusammengefassten Disziplinen Logik und Mengenlehre haben eine doppelte Funktion. Zum einen liefern sie einheitliche Sprach- und Formulierungs-Konventionen für die gesamte Mathematik (aussagenlogische Symbolik, Mengenschreibweise für Element- und Teilmengen-Beziehungen etc.), zum anderen handelt es sich jeweils um eigenständige Forschungsgebiete (höchst kompliziert und abstrakt - nur für ganz harte Spezialisten!).
- (3) Denkt man sich das Diagramm in der Mitte senkrecht geteilt, so steht rechts die "stetige" und links die "diskrete" Mathematik. (Beachte: "diskret" bedeutet in der Mathematik das Gegenteil von stetig!) Diese Einteilung ist allerdings sehr fließend und es gibt viele Überschneidungen und Wechselwirkungen. (Z. B. gehört die *elementare* Wahrscheinlichkeitstheorie weit eher auf die diskrete Seite und steht auch nicht zufällig in der Nähe der Kombinatorik.)
- (4) Früher kamen die Anwendungen der Mathematik fast ausschließlich von der stetigen Seite. Mit Beginn des digitalen Zeitalters hat sich das nachhaltig geändert. Gerade für die Informatik sind heute viele Teilgebiete der diskreten Mathematik viel wichtiger als etwa die klassische Analysis.
- (5) Zwei für die Informatik wichtige Spezialdisziplinen sind die *Kryptologie* und die *Codierungstheorie*, die beide der Algebra zuzurechnen sind. (In der Kryptologie spielt speziell die Zahlentheorie eine wichtige Rolle, insbesondere etwa die Suche nach möglichst großen Primzahlen, was früher ein reines Mathematiker-Hobby war.) Beide Themen haben etwas mit Datenverschlüsselung zu tun und viele Leute denken auch bei Codes in erster Linie an "Geheimcodes". In der Mathematik hat sich aber folgender Sprachgebrauch durchgesetzt: Die Kryptologie behandelt Verschlüsselungsverfahren zur Verhinderung von *Datenmissbrauch* jeder Art. Dazu gehören die "Geheimschriften" im engeren Sinne (Kryptographie), mit der Daten, die über öffentliche Kanäle übertragen werden, für Unbefugte unleserlich gemacht werden, aber auch z. B. Authentifizierungsverfahren für den elektronischen Zahlungsverkehr und ähnliches. Die Codierungstheorie behandelt dagegen Verschlüsselungsverfahren, die der Absicherung gegen *Übertragungsfehler* auf den technischen Übertragungswegen dienen ("Bitfehler"). Solche Verfahren heißen "fehlerkorrigierende Codes" (engl. error correcting codes, ECC) und bestehen - vereinfacht ausgedrückt - im Redundantmachen der Daten durch Hinzufügen von "Prüfbits". Effiziente Codes, die eine hohe Korrekturfähigkeit haben, ohne dass das Datenvolumen dafür unangemessen aufgebläht werden muss, lassen sich nur mit komplexen Methoden der Algebra realisieren.
- (6) Speziell für Medieninformatiker sind natürlich - im Hinblick auf die Computergrafik - die geometrischen Themen besonders wichtig. Die *analytische Geometrie* (in vektorieller Darstellung \Rightarrow lineare Algebra!) liefert z. B. die Verfahren, mit denen ein dreidimensionales Objekt korrekt auf eine zweidimensionale Zeichenfläche projiziert werden kann. Außerdem liefert sie etwa die Formeln zur Beschreibung von Drehungen im Raum, mit deren Hilfe man dann rotierende Objekte darstellen kann. Wenn die 3D-Objekte, die man darstellen will, nicht

nur von Ebenenstücken begrenzt werden, benötigt man die *Differentialgeometrie*. Diese liefert die Hilfsmittel, mit denen man dann auch gekrümmte Flächen im Raum formelmäßig beschreiben und ihre Eigenschaften untersuchen kann (z. B. das Reflexionsverhalten für Raytracing-Verfahren). Auch eine nahezu beliebige Modellierung solcher Flächen nach Designer-Vorgaben ist möglich (CAD-Systeme).

- (7) Ein weiteres für Medieninformatiker interessantes Thema ist die *Fouriertransformation*, die man im obigen Diagramm am ehesten der Funktionalanalysis zuordnen könnte. Damit kann man ein akustisches "Signal" (etwa ein Musikstück) in seine sogenannte "Frequenzdarstellung" umrechnen. Bei der Verarbeitung digitalisierter Audiodaten ist diese Darstellung oft sehr viel nützlicher als die normale "Zeitdarstellung". Viele Verfahren (digitale Filter und Effekte, Stimmen- und Sprachanalyse, MP3-Codierung) beinhalten daher als ersten Schritt immer eine "diskrete Fouriertransformation" DFT. (Beachte: Die Fouriertransformation ist ursprünglich eine Integralformel und gehört in die "stetige Mathematik". Da durch die Digitalisierung aus dem stetigen Analogsignal aber ein Satz diskreter Daten geworden ist, muss auch eine diskrete Variante der Fouriertransformation benutzt werden!)

