

- (1) Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x + y^2)e^z$. Berechne den Funktionswert und den Gradienten im Punkt $\vec{x}_0 = (1, -1, 0)$. Ermittle daraus einen Näherungswert für $f(0.9, -1.1, 0.1)$.

Lösung:

$$f(1, -1, 0) = 2$$

$$f_x(x, y, z) = e^z, \text{ also } f_x(1, -1, 0) = 1$$

$$f_y(x, y, z) = 2ye^z, \text{ also } f_y(1, -1, 0) = -2$$

$$f_z(x, y, z) = (x + y^2)e^z, \text{ also } f_z(1, -1, 0) = 2$$

$$\Rightarrow \text{grad}f(1, -1, 0) = (1, -2, 2).$$

Approximationsformel:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \text{grad}f(x, y, z), \text{ also}$$

$$f(0.9, -1.1, 0.1) \approx f(1, -1, 0) + (-0.1, -0.1, 0.1) \cdot (1, -2, 2) = 2 + 0.3 = 2.3.$$