(2) Berechne die relativen Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4$.

Lösung:
Partielle Ableitungen berechnen und Null setzen:
(i) $f_x(x,y) = 2xy^2 - 8x \stackrel{!}{=} 0$
(ii) $f_y(x,y) = 2x^2y - 2y \stackrel{!}{=} 0$
Aus (i) erhält man: $x = 0$ **oder** $y^2 = 4$.
Fall 1: $x = 0$
(ii) liefert $y = 0$.
Fall 2: $y = 2$
(ii) liefert $x^2 = 1$.
Fall 3: $y = -2$
(ii) liefert $x^2 = 1$.
Das ergibt insgesamt fünf kritische Punkte:
$K_1 = (0,0)$, $K_2 = (1,2)$, $K_3 = (-1,2)$, $K_4 = (1,-2)$, $K_5 = (-1,-2)$.

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung:
$f_{xx}(x,y) = 2y^2 - 8$, $f_{xy}(x,y) = 4xy$, $f_{yy}(x,y) = 2x^2 - 2$.
Damit lassen sich direkt die Hesse-Matrizen in den fünf kritischen Punkten hinschreiben:

$$H(K_1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Det\,H = 16 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Extremum, } -8 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum,}$$

$$H(K_2) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad Det\,H = -16 < 0 \;\Rightarrow\; \textbf{kein} \text{ Extremum,}$$

$$H(K_3) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad Det\,H = -16 < 0 \;\Rightarrow\; \textbf{kein} \text{ Extremum,}$$

$$H(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad Det\,H = -16 < 0 \;\Rightarrow\; \textbf{kein} \text{ Extremum,}$$

$$H(K_5) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad Det\,H = -16 < 0 \;\Rightarrow\; \textbf{kein} \text{ Extremum.}$$