(5) Für die Auflösung eines Salzes in Wasser gilt (bei geeigneten Rahmenbedingungen), daß die Zunahme der Konzentration annähernd proportional ist zur Differenz zwischen der aktuellen Konzentration und der Sättigungskonzentration. Benutzt wird ein Salz mit einer Sättigungskonzentration von 300 Gramm pro Liter.
(a) Formuliere dies als Differentialgleichung für die Funktion $y(t)$, die die Konzentration y (in Gramm pro Liter) als Funktion der Zeit t (in Minuten) beschreibt. Berechne die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$.
(b) Eine hinreichend große Menge des Salzes werde zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Wasser vermischt. Nach 10 Minuten wird eine Probe entnommen, die einen Salzgehalt von $100\frac{g}{l}$. aufweist. Welcher Wert für die Proportionalitätskonstante ergibt sich daraus?

Lösung:
(a) Konzentrationszunahme proportional zur Differenz bedeutet

$$y' = a(300 - y).$$

Lösbar mit "Trennung der Veränderlichen":

$$\frac{y'}{300-y} = a \quad\Rightarrow\quad \int \frac{1}{300-y}\,dy = \int a\,dt \quad\Rightarrow\quad \ln|300-y| = at + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Da nach Voraussetzung immer $y < 300$ gilt, kann man die Betragsstriche einfach weglassen, d. h. man hat $\ln(300-y) = at + c_1$.
Anwenden der Exponentialfunktion liefert

$$300 - y = e^{at}e^{c_1} = c\,e^{at} \quad\Rightarrow\quad y = -c\,e^{at} + 300,\ \ c > 0.$$

AWP:

$$y(0) = -c + 300 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad c = 300.$$

Lösung des AWP ist also $y = 300(1 - e^{at})$.

(b) $y(10) = 300(1 - e^{10a}) \overset{!}{=} 100 \quad\Leftrightarrow\quad e^{10a} = \frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{1}{10}\ln(\frac{2}{3})$.
[Numerischer Wert: ≈ –0.04, ist aber natürlich nicht erforderlich.]