(6) Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{für} \ -\pi \le x < -\frac{\pi}{3}, \\ 1 & \textit{für} \ -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \textit{für} \ \frac{\pi}{3} \le x < \pi, \end{cases}$$

beidseitig periodisch fortgesetzt mit der Periode $2\pi$.

(a) Skizziere die Funktion für ein Periodenintervall.

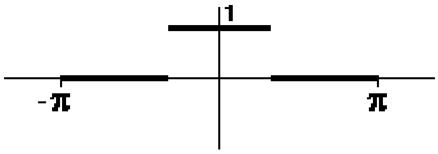
(b) Begründe (ohne Rechnung), dass alle Fourirkoeffizienten $b_\nu$ Null sein müssen.

(c) Berechne den Fourierkoeffizienten $a_0$ elementar-geometrisch (ohne Integration).

(d) Berechne die Fourierkoeffizienten $a_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$.

*Lösung:*

(a)




(b) Da es sich um eine gerade Funktion handelt ( $f(x) = f(-x)$, anschaulich: Spiegelsymmetrie zur y-Achse), gilt $b_\nu = 0$ für alle $\nu = 1, 2, 3, ....$

(c) Rechteckimpuls mit Länge $\frac{2\pi}{3}$ und Höhe 1 $\Rightarrow$ Fläche unter der Kurve ist $\frac{2\pi}{3}$, Division durch die Länge des Periodenintervalls liefert $a_0 = \frac{1}{3}$.

(d) $a_\nu = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx = 0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\nu x\ dx + 0$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\nu}\sin\nu x\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{1}{\pi\nu}(\sin\frac{\nu\pi}{3} - \sin(-\frac{\nu\pi}{3})).$$

Wegen $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ vereinfacht sich das zu:

$$a_\nu = \frac{2}{\pi\nu}\sin\frac{\nu\pi}{3}.$$

Insbesondere also

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{3} \qquad \left[= \frac{2}{\pi}\sin 60^o = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \pi\sqrt{3}\right],$$

$$a_2 = \frac{2}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3} \qquad \left[= \frac{1}{\pi}\sin 120^o = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}\right],$$

$$a_3 = \frac{2}{3\pi}\sin\pi = 0.$$