(4) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y = e^x$$

und die Lösung des AWP $y(0) = 1$.

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit $p(x) = 1$ und $r(x) = e^x$.

1. Schritt: $\int p(x)dx = \int 1\,dx = x$
2. Schritt: $\varphi(x) = e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x}$
3. Schritt: $\psi(x) = \int \frac{r(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{e^x}{e^{-x}}\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

Allgemeine Lösung: $y = \varphi(x)(\psi(x) + c) = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + c) = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x},\ \ c \in \mathbb{R}$.

[Alternativ auch möglich: Benutzung der geschlossenen Lösungsformel oder explizites Durchrechnen der Verfahren "Trennung der Veränderlichen" für die homogene Lösung und "Variation der Konstanten" für die partikuläre inhomogene Lösung.]

Lösung des AWP: $y(0) = \frac{1}{2} + c \overset{!}{=} 1 \ \Rightarrow\ c = \frac{1}{2}$, also $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.