Mathematik für Informatiker
Probeklausur Mathematik 1

Sergey Daschkovskiy, Jörn Loviscach
6. Juni 2005

Diplom Medieninformatik: Aufgaben 1 bis 14 bilden die erste Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 33, Mindestpunktzahl: 11), Die Aufgaben ab 15 sind Teil der zweiten Mathematikprüfung.

Bachelor Digitale Medien: Alle Aufgaben zusammen bilden die erste und einzige Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 41, Mindestpunktzahl: 14).

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und C über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: 2 P.

   A Die Zahl n ist gerade und größer als 13.

   C Die Zahl n ist ungerade.

   Kann man eine Aussage B so finden, so dass aus der Oder-Verknüpfung von A und B die Aussage C folgt, d. h. $A \vee B \Rightarrow C$? Falls ja: Geben Sie ein Beispiel für B an, falls nein: Begründung!

2. Seien $a > 1$, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\log_a(\sqrt[3]{b^x + 1}) = 5$ nach x auf. 2 P.

3. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) = \cos(\frac{x}{2} - 3) + 1$ auf dem Intervall $x \in [0, 12]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse. 2 P.

4. Sie haben fünf identische rote Bälle (R) und sechs identische grüne Bälle (G). Diese können Sie nach Farbmustern wie RRGGRRGGGRG in einer Reihe anordnen. Wie viele solche Muster gibt es für diese elf Bälle? 2 P.

5. Ein gleichseitiges Dreieck liegt im $\mathbb{R}^2$ oberhalb der x-Achse. Zwei seiner Eckpunkte sind $(0, 0)$ und $(2, 0)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des dritten Eckpunkts. 2 P.

6. Im $\mathbb{R}^3$ ist durch $3x + 4y + 5z = 6$ eine Ebene definiert. Geben Sie die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ an, die mit dieser Ebene keinen Punkt gemeinsam hat (keine eindeutige Lösung). 2 P.

7. Die 3×3-Matrix A erfülle die Gleichung 2 P.

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

   Ist die Matrix A dadurch eindeutig festgelegt oder nicht? Begründung! (Sie müssen A zur Lösung dieser Aufgabe nicht berechnen.)

8. Geben Sie eine 4×5-Matrix an, deren Kern dreidimensional ist (keine eindeutige Lösung). Wie groß ist der Rang dieser Matrix? 2 P.

9. Geben Sie einen Vektor des $\mathbb{R}^2$ an, der mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Winkel von $45°$ bildet (Drehsinn egal, keine eindeutige Lösung). Exakt, nicht bloß aus Skizze ablesen! 2 P.

10. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die erfüllen: $z^2 = z$. 2 P.

11. Bestimmen Sie für die gebrochenrationale Funktion 6 P.

$$f(x) := \frac{2x}{x^2 - x - 2}$$

   alle Nullstellen und Polstellen. Finden Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ lokaler Extrema und klassifizieren Sie diese jeweils als lokale Minima oder Maxima. Geben Sie Bereiche an, wo die Funktion monoton steigend/wachsend und wo sie konvex/konkav ist. Existiert eine Asymptotengerade für $x \to \pm\infty$? Falls ja, geben Sie eine Gleichung für diese an. Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

12. Bestimmen Sie die Summe der unendlichen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \ldots$. 2 P.

13. Bestimmen Sie: 2 P.

$$\int_{-3}^{3} |2x + 1| \, dx$$

14. Sie werfen einen Stein senkrecht nach oben. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt 5 m/s. Skizzieren Sie den Verlauf von Höhe und Geschwindigkeit bis zum Aufprall auf dem Boden. Wie viel Meter fliegt der Stein hoch? Rechnen Sie mit einer Schwerebeschleunigung von 10 m/s^2. 3 P.

15. Sie fahren jede Woche zehn Mal mit der Straßenbahn. Aus der Vergangenheit wissen Sie, dass Sie im Mittel jedes fünfzigste Mal kontrolliert werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nächste Woche genau zweimal kontrolliert werden? 2 P.

16. Sie haben ein Programm geschrieben, das auf 10 % der Windows-98-Rechner abstürzt, dagegen nur auf 1 % der übrigen Systeme. Wir nehmen an, 20 % Prozent der Benutzer haben Windows 98. Nun berichtet jemand, dass das Programm bei ihm abstürzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benutzt er Windows 98? 2 P.

17. Für $t \in \mathbb{R}$ sei eine Kurve definiert durch 2 P.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \sqrt{t^2+1} \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Kurvenpunkt (x, y), an dem die Tangentengerade der Kurve durch den Ursprung verläuft?

18. Auf der Schraubenlinie 2 P.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

wandert man ab $t = 0$ eine Wegstrecke von 5 entlang der Kurve aufwärts. An welchem Punkt (x, y, z) des Raums landet man dann?