Mathematik für Informatiker
Klausur Mathematik 1

Jörn Loviscach
21. September 2005

Diplom Medieninformatik: Aufgaben 1 bis 14 bilden die erste Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 33, Mindestpunktzahl: 11), Die Aufgaben ab 15 sind Teil der zweiten Mathematikprüfung.

Bachelor Digitale Medien: Alle Aufgaben zusammen bilden die erste und einzige Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 41, Mindestpunktzahl: 14).

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und C über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: **2 P.**

   A Die Zahl n ist gerade und zugleich kleiner als 13.

   C Die Zahl n ist gerade.

   Gibt es eine Aussage B, die notwendig für A ist und gleichzeitig hinreichend für C ist? Falls ja, geben Sie eine solche Aussage B an. Falls nein: Begründung!

2. Seien $a \neq 1$, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\sqrt{a^{x+\log_a b}} = 9$ nach x auf. **2 P.**

3. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prin- **2 P.**

zipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) = 1 + \tan(x/2)$ auf dem Intervall $x \in [0, 2\pi]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse.

4. Ein Passwort bestehe aus sechs Zeichen, allesamt Ziffern oder Kleinbuchstaben, aber keine Umlaute (36 mögliche Zeichen). Wenn ein Angreifer weiß, dass darin mindestens eine Ziffer (0, 1, ..., 9) vorkommt: Wie viele Möglichkeiten bleiben zum Ausprobieren? (gefundene Formel nicht exakt ausrechnen) 2 P.

5. Gegeben seien zwei Kreise im $\mathbb{R}^2$: der erste mit Mittelpunkt $(1, 0)$ und Radius 2, der zweite mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Radius 1. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte beider Kreislinien miteinander. 2 P.

6. Gegeben sei die folgende Gerade im $\mathbb{R}^3$: 2 P.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Welcher Punkt auf der Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung kommt dieser Geraden am nächsten?

7. Die Matrix 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie einen Normalenvektor dieser Ebene.

8. Gibt es reelle Zahlen a, b, c, so dass die Gleichung 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

keine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besitzt? Falls ja, geben Sie solche a, b, c an. Falls nein: Begründung!

9. Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$, so dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ und gleichzeitig $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2 P.

10. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die erfüllen: $z\overline{z} = 4$. 2 P.

11. Bestimmen Sie für die gebrochenrationale Funktion 6 P.

$$f(x) := \frac{2x+3}{x^2+2x+1}$$

alle Nullstellen und Polstellen. Finden Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ lokaler Extrema und klassifizieren Sie diese jeweils als lokale Minima oder Maxima. Geben Sie die Bereiche an, auf denen die Funktion monoton steigend/fallend und auf denen sie konvex/konkav ist. Existiert eine Asymptotengerade für $x \to \pm\infty$? Falls ja, geben Sie eine Gleichung für diese an. Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

12. Existiert der folgende Grenzwert? Falls ja: Welchen Wert hat er? Falls nein: Begründung! 2 P.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\cos(n)}{42+\sin(e^n)}$$

13. Bestimmen Sie $\int_2^3 (\sqrt{x} + e^{-3x})\, dx$. 2 P.

14. Ein Objekt bewegt sich in gerader Richtung. Bis zum Zeitpunkt $t =$ 20 s hat es eine Geschwindigkeit von 100 m/s. Dann startet ein gleichmäßiger Bremsvorgang bis zu $t = 50$ s. Zu diesem Zeitpunkt hat das Objekt noch eine Geschwindigkeit von 20 m/s. Wie groß war die (negative) Beschleunigung beim Bremsen? Welche Wegstrecke hat das Objekt von $t = 0$ bis $t = 50$ s zurückgelegt? 3 P.

15. Sie werfen Pfeile blind auf eine Dart-Scheibe. Deren Auge nehme ein Tausendstel der Gesamtfläche der Scheibe ein. Wenn zehn Pfeile die Scheibe treffen: Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei im Auge landen und die übrigen acht außerhalb des Auges? 2 P.

16. Die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem bestimmten Tag regnet, sei 0,2, unabhängig vom Tag. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnen wird, wenn es heute regnet, sei 0,7, ebenfalls unabhängig vom Tag. Wenn man weiß, dass es heute nicht regnet: Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass es gestern nicht geregnet hat? 2 P.

17. Eine Kurve $\vec{p}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ genüge der Gleichung 2 P.

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} ? \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie statt des Fragezeichens einen passenden Ausdruck, damit die Kurve die Form einer „8“ beschreibt. (keine eindeutige Lösung)

18. Wie lang ist die Kurve $\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 2t + 5 \\ \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + 7 \end{pmatrix}$ zwischen $t = 1$ und $t = 2$? 2 P.