Mathematik für Informatiker
Klausur Mathematik 1

Sergey Dashkovskiy, Jörn Loviscach
21. Juli 2005

Diplom Medieninformatik: Aufgaben 1 bis 14 bilden die erste Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 33, Mindestpunktzahl: 11), Die Aufgaben ab 15 sind Teil der zweiten Mathematikprüfung.

Bachelor Digitale Medien: Alle Aufgaben zusammen bilden die erste und einzige Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 41, Mindestpunktzahl: 14).

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und B über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: **2 P.**

   A Die Zahl n ist gerade.

   B Die Zahl n ist größer als 42 und ungerade.

   Ist A hinreichend für B? Ist A hinreichend für das Gegenteil von B? Begründung!

2. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\sqrt[3]{1 + \log_x(a)} = b$ nach x auf. **2 P.**

3. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) = (\sin(2x))^2$ auf dem Intervall $x \in [0, \pi]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse. **2 P.**

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lottoziehung „6 aus 49“ die Zahl 13 enthalten ist? 2 P.

5. Gesucht ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$, der die Gerade $y = 2x$ als Tangente hat. Geben Sie Mittelpunkt und Radius an. (exakt, nicht aus Skizze ablesen; keine eindeutige Lösung) 2 P.

6. Geben Sie eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ an, die von der Gerade 2 P.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den Abstand 1 hat. (keine eindeutige Lösung)

7. Beschreibt die Matrix 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Rotation im $\mathbb{R}^3$? Wenn ja: Um welche Achse? Wenn nein: Begründung!

8. Geben Sie eine 3×4-Matrix an, so dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern der Matrix liegt. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

9. Geben Sie zwei Vektoren des $\mathbb{R}^{\cancel{2}\,3}$ an, so dass deren Kreuzprodukt gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

10. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die erfüllen: $z^3 = -z$. 2 P.

11. Bestimmen Sie für die gebrochenrationale Funktion 6 P.

$$f(x) := \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

alle Nullstellen und Polstellen. Finden Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ lokaler Extrema und klassifizieren Sie diese jeweils als lokale Minima oder Maxima. Geben Sie die Bereiche an, auf denen die Funktion monoton steigend/fallend und auf denen sie konvex/konkav ist. Existiert eine Asymptotengerade für $x \to \pm\infty$? Falls ja, geben Sie eine Gleichung für diese an. Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

12. Existiert der folgende Grenzwert? Falls ja: Welchen Wert hat er? Falls nein: Begründung! 2 P.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{\exp(n) + \frac{1}{n}}$$

13. Bestimmen Sie: 2 P.

$$\int_0^{\pi/2} (x + \sin(2x))\, dx$$

14. Ein Auto beschleunigt in 10 s von 0 auf 100 km/h. Wenn das mit konstanter Beschleunigung passiert: Wie groß ist die Beschleunigung? Und welche Wegstrecke hat das Auto nach den 10 s zurückgelegt? Rechnen Sie einfachheitshalber mit 1 h $\approx \frac{10.000}{3}$s. 3 P.

15. Eine Internet-Suchmaschine nehme im Schnitt jeden Tag 3.000.000 Anfragen entgegen. Aber im Schnitt führen pro Tag nur drei dieser Anfragen zu Trefferlisten, die Ihre Web-Site enthalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem gegebenen Tag *exakt ein einziger* Treffer auf Ihre Site verweist? 2 P.

16. Die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem bestimmten Tag regnet, sei 0,3, unabhängig vom Tag. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnen wird, wenn es heute regnet, sei 0,8. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnen wird, wenn es heute *nicht* regnet 2 P.

17. Eine Kurve $\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ starte in Richtung der positiven x-Ache im Ursprung und verlaufe am Ende (d. h. bei $t = 1$) so, dass ihre Tangente dort parallel zur y-Achse ist. Geben Sie eine Funktionsgleichung für eine solche Kurve an. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

18. Wie lang ist die Spiralkurve 2 P.

$$\vec{p}(t) := \exp(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

zwischen $t = 0$ und $t = 2\pi$?