Mathematik für Informatiker Mathematik 1

Jörn Loviscach
16. Dezember 2004

Maximale Punktzahl: 38, Mindestpunktzahl: 13
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und C über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: 2 P.

   A Die Zahl n ist größer als 10.

   C Die Zahl n ist kleiner als 13.

   Gesucht ist Kann man eine Aussage B so finden, so dass aus der Und-Verknüpfung von A und B die Aussage C folgt? Falls ja: Geben Sie ein Beispiel für B an, falls nein: Begründung!

2. Für die reelle Zahl x gelte $(x + 2)^2 < 4$. Lässt sich die Menge aller solcher x als Intervall schreiben? Falls ja: Geben Sie das Intervall an. Falls nein: Begründung! 2 P.

3. Seien $a > 1$, $b > 1$ und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie 2 P.

$$\sqrt{\log_a(2 + b^{x+1})} = 4$$

nach x auf.

4. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) := \tan(2(x-3))$ auf dem Intervall $x \in [0, 6]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse. 2 P.

5. Ein bestimmtes Betriebssystem erlaubt Dateinamen mit bis zu acht Buchstaben aus einem Alphabet aus 26 Buchstaben (ohne Leerzeichen). Dateinamen müssen mindestens einen Buchstaben lang sein. Sie dürfen keine Leerzeichen enthalten. Wie viele verschiedene Dateinamen lassen sich bilden? 2 P.

6. Die Bakterien in einer bestimmten Bakterienkultur vermehren sich ungehindert, d. h. exponentiell. Am Anfang sind 500 Bakterien vorhanden, nach einer Stunde 800. Nach welcher Zeit sind 20.000 Bakterien vorhanden? 2 P.

7. Ein gleichschenkliges Dreieck mit Umfang 8 liegt im $\mathbb{R}^2$ über der x-Achse. Zwei seiner Eckpunkte sind $(0, 0)$ und $(2, 0)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des dritten Eckpunkts. 2 P.

8. Im $\mathbb{R}^3$ ist durch $1x + 2y + 3z = 4$ eine Ebene definiert. Geben Sie die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ an, die im Abstand 1 zu dieser Ebene parallel läuft (keine eindeutige Lösung). 2 P.

9. Kann diese Rechnung aufgehen? 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie Zahlen an, die man statt der Fragezeichen einsetzen kann. Falls nein: Begründung!

10. Füllen Sie die Fragenzeichen in der folgenden Matrix so, dass sie den Rang zwei hat (keine eindeutige Lösung): 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & ? & ? \\ 3 & 1 & ? & ? \\ 4 & 1 & ? & ? \end{pmatrix}$$

11. Jemand behauptet, eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um einen passenden Mittelpunkt transformiert das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,2)$, $(5,3)$ und $(3,6)$ in das Dreieck mit dem Eckpunkten $(3,4)$, $(1,6)$ und $(0,1)$. Kann das sein? Begründung! (exakt, nicht bloß aus Skizze schätzen) — 2 P.

12. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die erfüllen: $z^3 = -z$. — 2 P.

13. Skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf der Funktion — 2 P.

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

in der Umgebung von $x = -1$.

14. Geben Sie eine unendliche Reihe an, die als Summe den Wert drei ergibt. Die Reihe soll keine Nullen enthalten. (keine eindeutige Lösung) — 2 P.

15. Geben Sie ein Polynom dritten Grads an, das an $x = 1$ ein lokales Maximum besitzt (keine eindeutige Lösung). — 2 P.

16. Schätzen Sie den Wert von $\sin(x^2 - 1)$ an $x = 1{,}001$ durch quadratische Näherung ausgehend von $x = 1$. — 2 P.

17. Finden Sie mit Hilfe der Differentialrechnung von den rechtwinkligen Dreiecken mit Hypotenuse 1 dasjenige mit der größten Fläche. (Wie lang sind die Katheten?) Vollständige Begründung! — 2 P.

18. Bestimmen Sie: — 2 P.

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

19. Ein kugelförmiger Luftballon wird so aufgeblasen., dass sein Volumen pro Sekunde um 10 Kubikzentimeter wächst. Mit welcher Geschwindigkeit (Zentimeter pro Sekunde) wächst sein Radius in dem Moment, in dem er ein Volumen von 1000 Kubikzentimetern hat? Hinweis: Kugelvolumen $= \frac{4}{3}\pi \text{Radius}^3$. — 2 P.