

Mathematik für Informatiker

Mathematik 1

Jörn Loviscach
28. September 2004

Maximale Punktzahl: 39, Mindestpunktzahl: 13

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm (nicht mit abzugeben), nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname

Vorname

Matrikelnummer

E-Mail-Adresse

1. Gegeben sei die folgende Aussage A über eine Zahl $x \in \mathbb{R}$: 2 P.

$$x^2 = 4$$

Geben sie eine für A hinreichende, aber nicht notwendige Aussage an. Und geben Sie eine für A notwendige, aber nicht hinreichende Aussage an.

2. Gegeben sei im \mathbb{R}^2 die Menge aller Punkte, die zum Punkt $(3, 5)$ einen Abstand von 2 oder mehr haben. Schreiben Sie diese Menge in der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ???\}$, wobei Sie die Fragezeichen durch eine geeignete Formel ersetzen. 2 P.
3. Seien $a > 1$, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\sqrt[5]{7 + \log_3(a^x)} = b$ nach x auf. 2 P.

4. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) := \exp(\frac{x}{4}) - 1$ auf dem Intervall $x \in [-4, 4]$. Markieren Sie die Einheiten von x - und y -Achse. 2 P.

5. Ein Password besteht aus sechs Zeichen, allesamt Kleinbuchstaben und keine Umlaute (26 Möglichkeiten). Wenn ein Angreifer weiß, dass darin mindestens einmal der Buchstabe „x“ vorkommt: Wie viele Möglichkeiten zum Ausprobieren bleiben dann noch? Geben Sie eine exakte, per einfachem Taschenrechner auswertbare Formel an. 2 P.

6. Im Jahr 1 unserer Zeitrechnung gab es etwa 300 Millionen Menschen auf der Erde, 2000 Jahre später etwa 6 Milliarden. Wenn dieses Wachstum anhalten würde: Alle wie viel Jahre würde sich die Bevölkerungszahl etwa verzehnfachen? Geben Sie als Ergebnis einen geschätzten Zahlenwert an, nicht nur eine Formel. Rechenweg der Schätzung? 2 P.

7. Im \mathbb{R}^2 sei der Kreis mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Radius 3 gegeben. Geben Sie eine Geradengleichung für eine Tangente an diesen Kreis an, die *weder exakt horizontal noch exakt vertikal verläuft* (keine eindeutige Lösung). 2 P.

8. Im \mathbb{R}^3 sind zwei Geraden definiert durch 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine Ebene, die durch beide Geraden verläuft? Wenn ja, geben Sie eine Gleichung einer solchen Ebene an, falls nein, begründen Sie das.

9. Drei Matrizen hängen über die folgende Gleichung zusammen: 2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ? \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & a \\ ? & ? & b \end{pmatrix}$$

Die mit Fragezeichen besetzten Positionen sind dabei unbekannt. Kann man a und/oder b trotzdem bestimmen?

10. Geben Sie eine 4×5 -Matrix an, deren Rang gleich vier ist (keine eindeutige Lösung). Wie viele Dimensionen hat der Kern dieser Matrix? 2 P.

11. Ein Dreieck im \mathbb{R}^3 hat die Eckpunkte $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ und $(3, 2, 1)$. Geben Sie zwei verschiedene Vektoren der Länge 1 an, deren Richtung senkrecht zur Fläche dieses Dreiecks ist. 2 P.

12. Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, die erfüllen: $z^4 = 16$. Vorüberlegung: Wie viele gibt es wohl? 2 P.

13. Geben Sie die Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$ und die Polstellen der gebrochenrationalen Funktion 2 P.

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

an.

14. Schreiben Sie $0,003003003\dots$ als Bruch zweier ganzer Zahlen. 2 P.

15. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x^2+1} + e^{\sin(x)} \right)$$

16. Für ungefähr welche positive reelle Zahl x ist $\cos(x) = 0,995$? Benutzen Sie eine quadratische Näherung ausgehend von $x = 0$. 2 P.

17. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[2, 3]$ und sei bestimmt durch $f(x) := x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 7$. Was ist der größte Wert, den sie annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

18. Bestimmen Sie: 2 P.

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin(3x) dx$$

19. Ein Objekt bewegt sich in gerader Richtung. Bis zum Zeitpunkt $t = 10$ s hat es eine Geschwindigkeit von 100 m/s. Dann startet ein gleichmäßiger Bremsvorgang, durch den Objekt zur Zeit $t = 30$ s zum Stehen kommt. Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf von Geschwindigkeit und Position (Einheiten einzeichnen!). Schätzen Sie die Länge des Bremswegs (Rechenweg!). 3 P.