

# Mathematik für Informatiker

## Mathematik 1

Jörn Loviscach  
20. Juli 2004

Maximale Punktzahl: 39, Mindestpunktzahl: 13

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname
Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und C über eine Zahl  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ : 2 P.

A Die Zahl  $n$  ist gerade und größer als 13.

C Die Zahl  $n$  ist ungerade.

Kann man eine Aussage B so finden, so dass aus der Oder-Verknüpfung von A und B die Aussage C folgt, d. h.  $A \vee B \Rightarrow C$ ? Falls ja: Geben Sie ein Beispiel für B an, falls nein: Begründung!

2. Gegeben sei im  $\mathbb{R}^2$  die Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $(2, 3)$  und Radius 5. Schreiben Sie diese Menge (Randlinie und Inneres) in der Form  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ???\}$ . 2 P.

3. Seien  $a > 1$ ,  $b$  und  $x$  positive reelle Zahlen. Lösen Sie  $\log_a(\sqrt[3]{b^x + 1}) = 5$  nach  $x$  auf. 2 P.
4. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von  $f(x) = \cos(\frac{x}{2} - 3) + 1$  auf dem Intervall  $x \in [0, 12]$ . Markieren Sie die Einheiten von  $x$ - und  $y$ -Achse. 2 P.
5. Sie haben fünf identische rote Bälle (R) und sechs identische grüne Bälle (G). Diese können Sie nach Farbmustern wie RRGRRGGGRG in einer Reihe anordnen. Wie viele soche Muster gibt es für diese elf Bälle? 2 P.
6. Die Leistung der Mikroprozessoren hat sich in den vergangenen 15 Jahren ungefähr vertausendfacht. Angenommen, das Leistungswachstum ist gleichmäßig: Nach wie vielen Monaten verdoppelt sich die Leistung? Geben Sie als Ergebnis einen geschätzten Zahlenwert an, nicht nur eine Formel. Rechenweg der Schätzung? 2 P.
7. Ein gleichseitiges Dreieck liegt im  $\mathbb{R}^2$  über der  $x$ -Achse. Zwei seiner Eckpunkte sind  $(0, 0)$  und  $(2, 0)$ . Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des dritten Eckpunkts. 2 P.
8. Im  $\mathbb{R}^3$  ist durch  $3x + 4y + 5z = 6$  eine Ebene definiert. Geben Sie die Gleichung einer Geraden im  $\mathbb{R}^3$  an, die mit dieser Ebene keinen Punkt gemeinsam hat (keine eindeutige Lösung). 2 P.
9. Die  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  erfülle die Gleichung 2 P.

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix  $A$  dadurch eindeutig festgelegt oder nicht? Begründung! (Sie müssen  $A$  zur Lösung dieser Aufgabe nicht berechnen.)

10. Geben Sie eine  $4 \times 5$ -Matrix an, deren Kern dreidimensional ist (keine eindeutige Lösung). Wie groß ist der Rang dieser Matrix? 2 P.
11. Geben Sie einen Vektor des  $\mathbb{R}^2$  an, der mit  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  einen Winkel von  $45^\circ$  bildet (Drehsinn egal, keine eindeutige Lösung). Exakt, nicht bloß aus Skizze ablesen! 2 P.
12. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen  $z$ , die erfüllen:  $z^2 = z$ . 2 P.

13. Geben Sie die Nullstellen und Polstellen der gebrochenrationalen Funktion 2 P.

$$f(x) := \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

an.

14. Bestimmen Sie die Summe der unendlichen Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$  2 P.

15. Geben Sie ein Polynom dritten Grads an, das an  $x = 1$  eine horizontale Tangente, aber dort weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum hat (keine eindeutige Lösung). 2 P.

16. Schätzen Sie den Wert von  $x e^x$  an  $x = 0,01$  durch quadratische Näherung ausgehend von  $x = 0$ . 2 P.

17. Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, dass von allen Rechtecken mit Umfang 1 das Quadrat die Figur mit der größten Fläche ist. Vollständige Begründung! 2 P.

18. Bestimmen Sie: 2 P.

$$\int_{-3}^3 |x| dx$$

19. Sie werfen einen Stein senkrecht nach oben. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt 5 m/s. Skizzieren Sie den Verlauf von Höhe und Geschwindigkeit bis zum Aufprall auf dem Boden. Wie viel Meter fliegt der Stein hoch? Rechnen Sie mit einer Schwerebeschleunigung von  $10 \text{ m/s}^2$ . 3 P.