Mathematik für Informatiker
Mathematik 2

Jörn Loviscach, Hartmut Scholz
13. Februar 2003

Maximale Punktzahl: 21, Mindestpunktzahl: 8
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) := x^2y^2$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Isolinie $f(x,y) = 0$ und die Isolinie $f(x,y) = 4$. — 2 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) := 4x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 24x + 3$ definiert. Besitzt f relative Extrema? Wenn ja, an welchen Punkten (x,y)? Handelt es sich jeweils um ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum? Begründung! — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^3$ sei eine Funktion f durch $f(x,y,z) := y^2(x^3 - x) + e^{xz}$ definiert. Bestimmen Sie den Gradientenvektor am Punkt $(1,1,0)$ Ermitteln Sie damit in linearer Näherung den Wert $f(1{,}1; 0{,}99; 0{,}02)$. — 2 P.

4. Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^3y$ über die Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 1$ eingeschlossen wird. — 2 P.

5. Für $t \in [0,1]$ sei eine Kurve definiert durch — 2 P.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Länge dieser Kurve. Hinweis: Der unter der Wurzel entstehende Ausdruck lässt sich zu einem Quadrat zusammenfassen.

6. Eine Funktion f sei für $t \in [0, 3)$ definiert durch 3 P.

$$f(t) := \begin{cases} \sin(2\pi t), & \text{falls } 0 \leq t < \frac{3}{2}, \\ 0, & \text{falls } \frac{3}{2} \leq t < 3 \end{cases}$$

und auf alle $t \in \mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie den Gleichspannungsanteil sowie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_5. Hinweis: Sinus mit komplexer Exponentialfunktion ausdrücken.

7. Das Wachstum eines Baums sei abhängig von der Jahreszeit. Und zwar soll sich der Baum pro Tag um den Bruchteil von 2 P.

$$0,001 - 0,0006 \cos\left(2\pi \frac{t}{400 \text{ Tage}}\right)$$

seiner aktuellen Länge verlängern (bzw. im Winter verkürzen, wenn dieser Wert negativ ist). Zur Zeit $t = 0$ sie der Baum einen Meter hoch. Auf welche Länge wächst er in 1300 Tagen?

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2 P.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}.$$

9. In einer Schachtel befinden sich sieben Schrauben und sechs Muttern. Man entnimmt Teile blind und kann sie auch nicht tasten, denn die Schachtel steht auf einem Schrank und man hat Arbeitshandschuhe an. Weil die Muttern kleiner sind als die Schrauben, ist es doppelt so wahrscheinlich, eine *bestimmte* Schraube zu fassen wie eine *bestimmte* Mutter zu fassen. Wenn man ein Teil aus der Schachtel nimmt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das *irgendeine* der Muttern ist? 2 P.

10. Jemand bietet folgendes Glücksspiel an: Der Kunde zahlt einen Euro und zieht eine Karte aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (Skatblatt, also je acht Karten von Kreuz, Pik, Herz und Karo). 2 P.

    (a) Handelt es sich um eines der vier Asse, bekommt er fünf Euro ausbezahlt.

    (b) Handelt es sich um eine Herz-Karte (außer Herz-As), erhält er seinen einen Euro zurück.

    (c) Ansonsten verfällt der Einsatz.

    Welche Wahrscheinlichkeit hat jeder dieser drei Fälle? Welchen Gewinn macht der Veranstalter im Durchschnitt pro Spiel?