Mathematik für Informatiker Mathematik 1

Jörn Loviscach
26. September 2003

Maximale Punktzahl: 40, Mindestpunktzahl: 13
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und B über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: 2 P.

   A Die Zahl n ist kleiner als 13.

   B Die Zahl n ist ungerade und kleiner als 9.

   Geben Sie eine weitere, selbst erdachte Aussage C an, die sowohl hinreichend für A ist wie auch notwenig für B ist. Diese Aussage C soll nicht identisch mit A oder mit B sein. (keine eindeutige Lösung)

2. Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(0, 2)$. Schreiben Sie die Menge der Punkte des Dreiecks (Randlinie und Inneres) in der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ???\}$. 2 P.

3. Ein Energieversorungsunternehmen gibt Mengenrabatt auf den Strompreis. Und zwar wird die Rechnungssumme jeden Monat wie folgt berechnet: Die 1. bis die 100. Kilowattstunde (kWh) kosten jeweils 20 Cent, die 101. Kilowattstunde und alle folgenden kosten jeweils nur 15 Cent. Fassen Sie den Zusammenhang zwischen den in einem Monat verbrauchten kWh und der Rechnungssumme als Funktion f : Verbrauch $\mapsto$ Betrag auf. Was ist der Definitionsbereich? Eine mögliche Rechenvorschrift? Der Wertebereich? (Ignorieren Sie ausnahmsweise die Einheiten, hier kWh und Cent, und lassen Sie Bruchteile von Cent zu.) 2 P.

4. Seien $a > 1$, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $a^{b+\sqrt{x}} = 5$ nach x auf. 2 P.

5. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) = 4\sin(2x + 3)$ auf dem Intervall $x \in [0, 6]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse. 2 P.

6. Wie viele achtstellige (Telefon-)Nummern gibt es, die nicht mit einer 0 oder einer der Ziffenfolgen 110 und 112 anfangen? 2 P.

7. Ein radioaktiver Stoff habe eine Halbwertszeit von einem Jahr, das heißt, jedes Jahr zerfällt die Hälfte seiner Atome. Wenn man mit 10^{24} Atomen startet: Nach etwa wie vielen Jahren zerfällt das letzte der urspünglichen Atome? Geben Sie als Ergebnis einen geschätzten Zahlenwert an, nicht nur eine Formel. Rechenweg der Schätzung? 2 P.

8. Alle Seiten eines Vierecks haben die Länge 4; einer der Winkel ist 30°. Wie lang sind jeweils die beiden Diagonalen? 2 P.

9. Geben Sie im $\mathbb{R}^2$ zwei voneinander verschiedene Kreise an (Mittelpunkt? Radius?), deren Kreislinien jeweils durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(4, 4)$ laufen. (exakt, nicht nur aus Skizze ablesen; keine eindeutige Lösung) 2 P.

10. Kann es eine reelle 2×2-Matrix A geben, so dass die daraus berechnete Matrix A^2 die Spiegelung an der x-Achse ist? Falls ja: Geben Sie ein Beispiel für A an. Falls nein: Begründung! 2 P.

11. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem: 2 P.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 5, \\ 2x + 3y + az &= 5. \end{aligned}$$

Dabei ist a eine unbekannte Konstante. Wie viele Dimensionen hat die Lösungsmenge (also die Menge der Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, welche das Gleichungssystem für festes a erfüllen)? Wie hängt die Dimension der Lösungsmenge vom Wert von a ab?

12. Von zwei unbekannten Vektoren seien das Vektorprodukt und das Skalarprodukt gegeben. Kann man die beiden Vektoren daraus eindeutig bestimmen? Wenn ja: Wie? Wenn nein: Begründung! 2 P.

13. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z \neq 0$, die erfüllen: $z = 2/\overline{z}$. 2 P.

14. Gibt es eine gebrochenrationale Funktion f, so dass 2 P.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

und außerdem

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$

gilt? Falls ja: Geben Sie ein Beispiel für f an. Falls nein: Begründung!

15. Geben Sie ein Polynom 3. Grads an, das bei $x = 2$ ein lokales Minimum hat. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

16. Schätzen Sie $\cos(89°)$. Rechenweg! 2 P.

17. Ein Sportstadion hat ein rechteckiges Spielfeld; daran schließen auf zwei gegenüberliegenden Seiten Halbkreise an. Die Rundlaufstrecke, also der Umfang der gesamten Figur, ist 400 Meter lang. Welche Fläche kann das rechteckige Spielfeld maximal besitzen? Rechenweg! 3 P.

18. Wie muss man die reelle Zahl b wählen, wenn das Integral 2 P.

$$\int_{-4}^{b} x(\sin(x))^2 \, dx$$

einen möglichst niedrigen Wert haben soll? Rechenweg/Begründung!

19. Eine Boje schwimmt auf dem Wasser. Es ist starker Seegang. Die Boje bewegt sich alle zehn Sekunden mit den Wellen auf- und wieder abwärts. In ihrer tiefsten Lage ist sie 10 m über Grund, in der höchsten 12 m. Bei $t = 0$ befindet sie sich in der tiefsten Lage. Skizzieren Sie die Höhe und die vertikale Geschwindigkeit der Boje als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit. Zeichnen Sie an allen Achsen die Einheiten ein (Meter, Sekunden usw.). Stellen Sie die Kurven größenordnungsmäßig richtig dar, soweit mit diesen Angaben möglich. 3 P.