Mathematik für Informatiker Mathematik 1: Probeklausur

Jörn Loviscach
1. Juli 2003

Maximale Punktzahl: 41, Mindestpunktzahl: 14
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Um Missverständnissen vorzubeigen: In der echten Klausur ändere ich nicht einfach die Zahlen, sondern variiere die Aufgabenstellungen grundlegend. Es ist deswegen praktisch sinnlos, Rechenwege auswendig zu lernen. In der echten Klausure recycle ich außerdem keine alten Aufgaben (wie teilweise hier).

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden drei Aussagen A, B, C über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: — 2 P.

   A Die Zahl n ist gerade.

   B Die Zahl n ist größer als 42 oder sie ist ungerade.

   C Die Zahl n ist kleiner als 13.

   Können alle drei Aussagen gleichzeitig wahr sein? Begründung!

2. Geben Sie drei verschiedene Elemente folgender Menge an: $\{x \in \mathbb{R} : (3x+1)^2 < 7\}$ — 2 P.

3. Geben Sie zwei Intervalle reeller Zahlen an, die Folgendes erfüllen: Ihre Schnittmenge ist gleich dem offenen Intervall $(2, 3)$ und ihre Vereinigungsmenge ist das abgeschlossene Intervall $[1, 4]$. (Lösung nicht eindeutig) 1 P.

4. Jemand legt für seine Buchsammlung eine Liste mit zwei Spalten an. In die erste Spalte schreibt er jeweils den Titel eines Buchs, in die zweite Spalte dessen Seitenzahl. Unter welchen Umständen lässt sich diese Tabelle als mathematische Abbildung $f : D \to W$ auffassen? Was wird worauf abgebildet? Wie kann man D und W wählen? Was ist $f(D)$ in diesem Beispiel? 2 P.

5. Seien $a > 1$, $b > 1$ und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $a^{x-2}b^x = 3$ nach x auf. 2 P.

6. Ein reelles Polynom habe an der Stelle $x = 0$ den Wert 3, an der Stelle $x = 1$ den Wert 2 und an der Stelle $x = 2$ den Wert 4. Ist das Polynom damit eindeutig festgelegt? Falls ja, begründen Sie das. Falls nein, geben Sie zwei verschiedene Beispiele für solche Polynome mit diesen Eigenschaften an. 2 P.

7. Gegeben seien zehn durchnummerierte Kugeln sowie ein roter, ein grüner und ein blauer Beutel. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auf die Beutel zu verteilen? Dabei dürfen auch Beutel leer bleiben. 2 P.

8. Im $\mathbb{R}^2$ sei der Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$ und Radius 4 gegeben. Geben Sie eine Gleichung für eine Gerade an, die den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ besitzt und die Kreislinie tangential streift. 2 P.

9. Im $\mathbb{R}^3$ sei das Dreieck gegeben, das von den drei Punkten $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ und $(4, 3, 2)$ aufgespannt wird. Geben Sie zwei verschiedene Vektoren der Länge 1 an, die senkrecht zur Dreiecksfläche verlaufen. 3 P.

10. Eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um $+90°$ mit zunächst unbekanntem Mittelpunkt bilde den Punkt $(3, 1)$ auf den Punkt $(2, 4)$ ab. Berechnen Sie das Zentrum der Drehung. (Nicht nur per Skizze!) 2 P.

11. Wie kann man die Zahlen x, y, z so wählen, dass folgende Determinante gleich null ist? (Keine eindeutige Lösung) 2 P.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 3 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

12. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten an, dessen Lösungsmenge eine (zweidimensionale) Ebene im vierdimensionalen Raum bildet. Geben Sie diese Lösungsmenge durch eine Ebenengleichung an. 2 P.

13. Von einem Dreieck sei bekannt, dass eine Seite die Länge 1 hat und eine andere Seite die Länge 2 hat. Außerdem sei bekannt, dass einer der Winkel $90°$ beträgt, aber es sei nicht bekannt, welcher das ist. Welche Möglichkeiten bleiben nach diesen Informationen für die Länge der dritten Seite des Dreiecks? 2 P.

14. Markieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle Zahlen z, die $z = z^2$ erfüllen. 2 P.

15. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(n)$ so an, dass die Folge $\frac{7+4n^2+f(n)}{\exp(-n)+3n}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ gegen die Zahl 13 konvergiert. 2 P.

16. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für eine reelle gebrochenrationale Funktion f an, welche bei $x = 1$ eine Polstelle besitzt, zu beiden Seiten dieser Polstelle gegen $-\infty$ geht und in der Horizontalen asymptotisch gegen die Gerade $y = 2x + 1$ strebt. (Lösung nicht eindeutig) 3 P.

17. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[2, 3]$ und sei bestimmt durch $f(x) := x^3 - 5x^2 + 8x$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

18. Schätzen Sie den Wert von $\sqrt{1,01}$, indem Sie die Wurzelfunktion durch ihre Tangentengerade an der Stelle $x = 1$ nähern. 2 P.

19. Wie groß ist die Fläche zwischen Sinus- und Cosinuskurve von $x = 0$ bis zum ersten Schnittpunkt dieser beiden Kurven rechts davon? 2 P.

20. Ein Zug beschleunigt aus dem Stand sehr langsam bis zu seiner Höchstgeschwindigkeit. Nach längerer Fahrt mit dieser Geschwindigkeit erfolgt eine Notbremsung. Skizzieren Sie – so weit mit diesen Angaben möglich – die zurückgelegte Strecke, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktionen der Zeit. 2 P.