Mathematik für Informatiker
Mathematik 1

Jörn Loviscach
18. Juli 2003

Maximale Punktzahl: 43, Mindestpunktzahl: 14
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden drei Aussagen A, B, C über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: 2 P.

   A Die Zahl n ist gerade.

   B Die Zahl n ist größer als 42 und sie ist ungerade.

   C Die Zahl n ist größer als 13.

   Ist eine dieser Aussagen *hinreichend* für eine oder mehrere andere der drei Aussagen? Ist eine dieser Aussagen *notwendig* für eine oder mehrere andere der drei Aussagen? Begründung!

2. Für die reelle Zahl x gelte $-3 < x \leq 0$. Welche Menge von Zahlen kann dann Ergebnis von $\frac{1}{x+4}$ sein? Geben sie diese Menge als Intervall an. 2 P.

3. Skizzieren Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ als Teil der Ebene. 2 P.

4. Gesucht ist eine Funktion f, welche Temperaturangaben von Grad Celsius in Grad Fahrenheit umrechnet. Diese Funktion verläuft linear und erfüllt $f(0) = 32$, d. h. 0 Grad Celsius sind 32 Grad Fahrenheit, sowie $f(100) = 212$. Ihr Definitionsbereich ist $D := [-273, \infty)$, weil die tiefstmögliche Temperatur $-273\,°\mathrm{C}$ beträgt. Geben Sie eine Rechenvorschrift für f an. Als welches Zahlenintervall muss man die Menge W wählen, damit $f : D \to W$ umkehrbar ist? 2 P.

5. Seien $a > 1$, $b < 1$ und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\sqrt[a]{b + 2^x} = 5$ nach x auf. 2 P.

6. Ein reelles Polynom habe an den Stellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ den Wert 0. Es berühre an $x = 1$ die x-Achse von oben. Welchen Grad muss das Polynom mindestens haben? Warum? Geben Sie außerdem ein Beispiel für ein solches Polynom an. (Keine eindeutige Lösung) 2 P.

7. Wie viele sechsstellige Ziffernkombinationen gibt es, in denen keine Ziffer mehrfach vorkommt? Beispiel: 042159 2 P.

8. Ein Zylinder M habe die Höhe 2, den Radius 3 und stehe zentriert über dem Ursprung auf der xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie den Zylinder (als gefüllten Körper) in Formeln, also als $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ???\}$. 2 P.

9. Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Fläche 3. Eine der Katheten habe die Länge 2. Was sind die Winkel des Dreiecks? 2 P.

10. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Kugeln mit Radius 2 gegeben. Der Mittelpunkt der einen sei $(1, 2, 3)$, der Mittelpunkt der anderen $(4, 3, 2)$. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, so dass eine Spiegelung an dieser Ebene die eine Kugel in die andere verwandelt. 2 P.

11. Geben Sie eine 2×2-Matrix A an, für die gilt, dass A^6 die Einheitsmatrix ist. Aber A soll nicht schon selbst gleich der Einheitsmatrix sein. Ist A durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt? Begründung! 2 P.

12. Kann ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten unlösbar sein? Falls ja, geben Sie ein solches an. Falls nein, begründen Sie das. 2 P.

13. Das Kreuzprodukt zweier unbekannter Vektoren ergibt den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Um welche beiden Vektoren könnte es sich handeln? (Keine eindeutige Lösung) 2 P.

14. Wie findet man in der komplexen Zahlenebene zu einer Zahl $z \neq 0$ ihren Kehrwert $1/z$ *geometrisch*? (Länge, Winkel) 2 P.

15. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(n)$ und eine Rechenvorschrift $g(n) \neq 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ so an, dass für $n \to \infty$ folgende Konvergenzen gelten: $f(n) \to 0$ und $g(n) \to 0$, aber $\frac{f(n)}{g(n)} \to 5$. (Keine eindeutige Lösung) 2 P.

16. Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit 3 P.
$$f(x) := \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4x + 4}.$$
Besimmen Sie Nullstellen und Polstellen. Skizzieren Sie den schematischen Verlauf der Funktion in der Nähe ihrer Nullstellen und Polstellen. Wie verhält sich die Funktion asymptotisch für $x \to \pm\infty$?

17. Die Hersteller von Festplatten verstehen unter einem Gigabyte typischerweise 1.000.000.000 Byte; in der Informatik bedeutet ein Gigabyte dagegen meist 1024 mal 1024 mal 1024 Byte. Wie groß ist der Unterschied in Prozenten? Rechnen Sie das nicht exakt aus, sondern schätzen Sie mittels linearer Näherung. 2 P.

18. Auf dem xy-Koordinatensystem sitzen zwei Käfer. Der eine krabbelt auf der x-Achse mit der Geschwindigkeit 1 Einheit/s in Richtung negativer x-Werte; zum Zeitpunkt $t = 0$ ist er beim Punkt $(5, 0)$. Der andere krabbelt auf der y-Achse mit der Geschwindigkeit 2 Einheiten/s in Richtung positiver y-Werte; zum Zeitpunkt $t = 0$ ist er beim Punkt $(0, -3)$. Zu welchem Zeitpunkt sind sich die Käfer am nächsten, d. h. wann ist ihr Abstand minimal? 3 P.

19. Die (oben gefüllte) Schablone einer Normalparabel werde in horizontaler Richtung zerschnitten. In welcher Höhe muss der Schnitt erfolgen, damit der untere abgeschnittene Teil eine Fläche von vier Einheitsquadraten hat? 2 P.

20. Die Wagen A und B befinden sich auf einer langen Straße. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht B, während A soeben mit konstanter Geschwindigkeit von 100 km/h an ihm vorbeifährt. A hält diese Geschwindigkeit konstant bei. B dagegen fährt erst bei $t = 30$ min allmählich los und beschleunigt dann, bis er A zum Zeitpunkt $t = 2$ h eingeholt hat. Dann fährt er Stoßstange an Stoßstange hinter A her. Skizzieren Sie – so weit mit diesen Angaben möglich – für beide Wagen die zurückgelegte Strecke und die Geschwindigkeit als Funktionen der Zeit. 3 P.