Mathematik für Informatiker
Mathematik 2

Jörn Loviscach, Torsten Mehrwald
8. April 2003

Maximale Punktzahl: 21, Mindestpunktzahl: 7
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $y \neq 1$ eine Funktion f durch $f(x,y) := (x+1)^2/(y-1)^2$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Menge der Punkte (x,y) mit $f(x,y) = 0$ und die mit $f(x,y) = 1$. — 2 P.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2 \sin(3y)$. Liegt an der Stelle $(x,y) = (1,0)$ ein lokales Extremum? Begründung! Schätzen Sie außerdem den Wert an $x = 0,9$, $y = 0,01$ durch lineare Näherung. — 3 P.

3. Integrieren Sie die durch $f(x,y) := R^4/(x^2+y^2)^2$ definierte Funktion über die Ebene $\mathbb{R}^2$ ohne die Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung. — 2 P.

4. Auf der Schraubenlinie — 2 P.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

wandere man ab $t = 0$ eine Wegstrecke von 5 entlang der Kurve aufwärts. An welchem Punkt (x, y, z) des Raums landet man dann?

5. Eine Welle f sei für $t \in [0, 4\pi)$ definiert durch 3 P.

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t), & \text{falls } 0 \le t < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } 2\pi \le t < 4\pi. \end{cases}$$

Diese Funktion f sei periodisch auf alle $t \in \mathbb{R}$ ausgedeht. Bestimmen Sie ihren Gleichspannungsanteil sowie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_4.

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung 3 P.

$$y' + ky = e^{kx}.$$

Dabei ist k eine fest vorgegebene Zahl.

7. Finden Sie die Lösung y von 2 P.

$$y'' + 6y' + 9y = 0,$$

wenn $y(0) = -4$ und zugleich $y'(0) = 14$.

8. Die Zufallsgröße X habe eine Dichtefunktion f mit 2 P.

$$f(x) := \begin{cases} x/(2k^2) & \text{falls } 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $k > 0$ eine gegebene Konstante und a zunächst unbekannt. Welchen Wert muss a in Abhängigkeit von k besitzen? Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert $E[X]$ in Abhängigkeit von k.

9. Ein Frage-Antwort-Spiel enthalte 500 Fragekarten. 100 Karten decken das Fachgebiet Geschichte ab, 100 Karten die Naturwissenschaften und 300 Karten das Allgemeinwissen. Alle Karten sind gut gemischt und liegen verdeckt in einem Kasten. Nach jedem Zug legt der Spieler die Karte zurück und mischt erneut. Wenn er zweimal zieht, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er dann beide Male Geschichtskarten? Wie viele Karten muss er ziehen, damit mit mehr als 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Geschichtskarte dabei ist? 2 P.