Mathematik für Informatiker
Mathematik 2

Jörn Loviscach, Torsten Mehrwald
26. Februar 2003 (Probeklausur)

Maximale Punktzahl: 20, Mindestpunktzahl: 7
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ sei $f(x, y)$ definiert durch $(x + y)/(x^2 + y^2)$. Lässt sich diese Funktion f stetig in den Punkt $(0, 0)$ fortsetzen? Begründung! — 2 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 7$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Wenn ja, an welchen Punkten (x, y)? Handelt es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein Minimum? Begründung! — 2 P.

3. Der Stumpf einer abgebrochenen Säule stehe auf der xy-Ebene. Seine Grundfläche sei der Kreis mit Radius $1/2$ um den Ursprung. An jedem Punkt (x, y) der Grundfläche habe der Säulenstumpf die Höhe $h(x, y) = 3 - x^2 - y^2 + x$. Berechnen Sie sein Volumen. (Brüche im Ergebnis nicht zusammenfassen) — 3 P.

4. Konkretisieren Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise (keine eindeutige Lösung) so, dass die Kurve beim Parameterwert $t = 1/2$ eine Tangente mit einer Steigung von $-45°$ besitzt. Begründen Sie, dass das der Fall ist. — 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} ? \\ t^{42} \end{pmatrix}$$

5. Gegeben sei eine „gleichgerichtete" Sinuswelle f mit $f(t) := |\sin(t)|$ für — 3 P.

alle Zeiten t. Bestimmen Sie deren (kleinstmögliche) Periodenlänge, den Gleichspannungsanteil sowie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_1. Hinweis: Für Letzteres können Sie $\sin(t)$ mit Hilfe von $\exp(it)$ und $\exp(-it)$ schreiben.

6. Ein aufrecht stehender zylindrischer Wasservorratsbehälter habe die Querschnittsfläche $A_1 = 100\,\mathrm{m}^2$. Am Boden befindet sich ein Abfluss mit mit dem Querschnitt $A_2 = 10\,\mathrm{m}^2$. Wenn h die Höhe des Wasserstands über dem Boden ist, läuft das Wasser so aus dem Behälter: 2 P.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh(t)}.$$

Dabei ist $g \approx 10\,\mathrm{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung. Wenn der Behälter zu Beginn $16\,\mathrm{m}$ hoch gefüllt ist, dauert es wie lange, bis er ausgelaufen ist?

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 3 P.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \cos(3x).$$

8. Von der stetigen Zufallsvariable X sei bekannt, dass ihre Dichte folgende Form hat: 2 P.

$$f(x) := \begin{cases} cx(1-x) & \text{falls } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist c eine zunächst unbekannte reelle Zahl. Begründen Sie, dass c gleich 6 sein muss. Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ annimmt. (Brüche im Ergebnis nicht zusammenfassen)

9. Drei Personen A, B und C nehmen an einem Test teil. Dessen Ergebnis soll möglichst geheim bleiben. A erfährt jedoch, dass einer (und nur einer) der drei Teilnehmer den Test bestanden hat. A bittet den Testleiter, ihm von den beiden anderen Kandidaten einen zu nennen, der nicht bestanden hat. Der Leiter lehnt die Auskunft mit der Begründung ab, dass dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A den Test bestanden hat, von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ steigen würde. Stimmt das? Berechnen Sie dazu die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A den Test bestanden hat, wenn der Testleiter ihm B als Kandidaten nennt, der nicht bestanden hat. (Annahme: Wenn A den Test bestanden hat, nennt der Testleiter mit gleicher Wahrscheinlichkeit B oder C.) 3 P.