blau: angesagte Änderungen

Mathematik für Informatiker
Mathematik 1

Jörn Loviscach

18. Dezember 2002

Maximale Punktzahl: 64, Mindestpunktzahl: 26
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ für alle Aussagen p, q und r. — 2 P.

2. Schreiben Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die $x^2 < 4$ erfüllen, als Intervall, d. h. einen Ausdruck in der Art von $[3, 4)$. — 1 P.

3. Geben Sie zwei Intervalle reeller Zahlen an, die Folgendes erfüllen: Ihre Schnittmenge ist gleich $(2, 3)$ und ihre Vereinigungsmenge ist $[1, 4]$. — 1 P.

4. Eine komplexe Zahl z erfülle $3iz = 2z + i$, wobei i die imaginäre Einheit ist. Schreiben Sie z in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a und b. — 1 P.

5. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\frac{\sqrt{x^7+a}}{3} = b$ nach x auf. — 1 P.

6. Seien $a > 1$, $b > 1$ und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $a^{x-2}b^x = 3$ nach x auf. — 1 P.

7. Auf der Menge $\{A, B, C, D, E\}$ sei eine Art Addition wie folgt definiert: 2 P.

$\sharp$	A	B	C	D	E
A	B	E	D	A	C
B	E	C	A	B	D
C	D	A	E	C	B
D	A	B	C	D	E
E	C	D	B	E	A

Was sollte dann sinnvollerweise die Differenz $A - C$ sein? Rechenweg?

8. Ein reelles Polynom habe an der Stelle $x = 0$ den Wert 3, an der Stelle $x = 1$ den Wert 2 und an der Stelle $x = 2$ den Wert 4. Ist das Polynom damit eindeutig festgelegt? Falls ja, begründen Sie das. Falls nein, geben Sie zwei verschiedene Beispiele für solche Polynome mit diesen Eigenschaften an. 2 P.

9. Im $\mathbb{R}^2$ seien der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 3 sowie der Kreis mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Radius 2 gegeben. Schneiden sich die beiden Kreislinien? Wenn ja: Wo? 3 P.

10. Geben Sie eine Gleichung für eine ~~die~~ Gerade im $\mathbb{R}^2$ an, die den Punkt $(1, 2)$ enthält, zum Ursprung den Abstand 2 besitzt ~~und oberhalb vom Ursprung verläuft.~~ Lösungsweg! 3 P.

11. Im $\mathbb{R}^3$ sei das Dreieck gegeben, das von den drei Punkten $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ und $(4, 3, 2)$ aufgespannt wird. Geben Sie zwei verschiedene Vektoren der Länge 1 an, die senkrecht zur Dreiecksfläche verlaufen. 3 P.

Reihenfolge: A B D

12. Ein Viereck im $\mathbb{R}^3$ habe die Eckpunkte $(1, 2, 3)$, $(3, 3, 6)$, $(2, 3, 2)$ und C $(4, 4, 5)$. Handelt es sich dabei um ein Rechteck? Vollständige Begründung! 2 P.

13. Füllen Sie die Lücken in der Matrix so aus, dass die Rechnung aufgeht (keine eindeutige Lösung): 1 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. Eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um $+45°$ mit zunächst unbekanntem Mittelpunkt bilde den Punkt $(3, 1)$ auf den Punkt $(2, 4)$ ab. Berechnen Sie das Zentrum der Drehung. 2 P.

15. Eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(3, 5)$ um einen zunächst unbekannten Winkel bilde den Punkt $(1, 2)$ auf den Punkt $(\underset{6}{\cancel{4}}, 3)$ ab. Bestimmen Sie rechnerisch den Drehungswinkel. 2 P.

16. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 2 P.

17. Geben Sie zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ an (z. B. in Punkt-Richtungs-Form), die den Abstand 1 voneinander haben und nicht parallel zueinander sind. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

18. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 5 \\ x + 4y + 7z + 8u &= 7 \\ 2x + 5y + 7z + 9u &= 12 \\ 2x + 2y + z + 2u &= 4 \end{aligned}$$

19. Geben Sie eine reelle Matrix an, deren Kern die Menge der Vektoren der Art $\begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist. 2 P.

20. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle z mit $z^6 = i$. 2 P.

21. Von einem Dreieck sei bekannt, dass eine Seite die Länge 1 hat und eine andere Seite die Länge 2 hat. Außerdem sei bekannt, dass einer der Winkel $90°$ beträgt, aber es sei nicht bekannt, welcher das ist. Welche Möglichkeiten bleiben nach diesen Informationen für die Länge der dritten Seite des Dreiecks? 2 P.

22. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist e^z gleich einer reellen Zahl? 2 P.

23. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $2x^2 + 12x + 26 = 0$. 2 P.

24. Ist die Folge $\frac{7+4n^2}{\exp(-n)+3n}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

25. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für eine reelle gebrochenrationale Funktion f an, welche bei $x = 1$ eine Polstelle besitzt, zu beiden Seiten dieser Polstelle gegen $-\infty$ geht und in der Horizontalen asymptotisch gegen die Gerade $y = 2x + 1$ strebt. (Lösung nicht eindeutig) 3 P.

26. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(x+4) + \frac{e^{3x}}{1+x^2}\right)$$

27. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[2,3]$ und sei bestimmt durch $f(x) := x^3 - 5x^2 + 8x$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

28. Rechnen Sie aus: 2 P.

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \exp(-x)\right) dx$$

29. Finden Sie eine Stammfunktion zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch: 2 P.

$$f(x) := \frac{\cos(x)}{\sqrt{2-\sin(x)}}$$

30. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^3 \frac{x-3}{x^2-4x}\, dx$$

31. Lösen Sie mittels partieller Integration das Integral vollständig auf (Rechenweg!): 2 P.

$$\int_1^2 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

32. Wie groß ist der Fehler, wenn man $\int_0^4 x^4\, dx$ per Simpson-Verfahren mit zwei Doppelstreifen nähert? 2 P.

33. Entwickeln Sie die auf $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sin(\sin(x))$ definierte Funktion f an $x = 0$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.