Mathematik für Informatiker
Probeklausur: Mathematik 1

Jörn Loviscach
4. März 2002

Maximale Punktzahl: 64, Mindestpunktzahl: 26
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Hinweis zur Probeklausur. Richten Sie sich darauf ein, dass ich die Aufgabentypen variiere. Wenn hier nach dem Kern gefragt ist, könnte später das Bild vorkommen; wenn hier der Abstand einer Ebene vom Ursprung zu berechnen ist, könnte der Abstand zweier paralleler Geraden gefragt sein. Das Aufschreiben oder Auswendiglernen von Rezepten hilft damit wenig. Stattdessen sind Verstehen und Nachdenken gefragt.

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $p \wedge q \;\Leftrightarrow\; p \wedge (q \vee \neg p)$ für alle Aussagen p und q. — 2 P.
2. Schreiben Sie das Intervall $[-1, 2)$ als Schnittmenge zweier voneinander verschiedener Intervalle. (Lösung nicht eindeutig) — 1 P.
3. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(0, 3] \setminus (1, 2]$ als Vereinigungsmenge zweier Intervalle. — 1 P.

4. Geben Sie eine komplexe Zahl z an, für die gilt: $(1+2i)z = 4$. Schreiben Sie z in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a und b. 1 P.

5. Die Menge $\{A, B, C, D\}$ wird durch die in der Tabelle definierte Rechenoperation $\sharp$ zu einer Gruppe. Geben Sie das neutrale Element an; begründen Sie, warum dieses Element das neutrale ist. 1 P.

$\sharp$	A	B	C	D
A	B	D	A	C
B	D	C	B	A
C	A	B	C	D
D	C	A	D	B

6. Seien a, b und x positive reelle Zahlen, $a \neq 1$. Lösen Sie nach x auf: $\sqrt[b]{1 + a^x} = 2$. 1 P.

7. Seien a, b und x positive reelle Zahlen, $a \neq 1$. Lösen Sie nach x auf: $\log_a(x^b) = 3$. 1 P.

8. Schreiben Sie das Polynom $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ vollständig in (ggf. komplexe) Linearfaktoren zerlegt. Hinweis: p hat die Eigenschaft $p(2) = 0$. 2 P.

9. Durch die Punkte $(1, 2)$ und $(2, 5)$ des $\mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Gerade. Geben Sie zwei Punkte dieser Geraden an, die voneinander den Abstand $\sqrt{40}$ haben. (Lösung nicht eindeutig) 2 P.

10. Zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich senkrecht im Punkt $(2, 3)$. Die erste Gerade enthält außerdem den Punkt $(4, 7)$. Geben Sie eine Gleichung für die zweite Gerade an. 2 P.

11. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$ und $(3, 5, 5)$. Berechnen Sie, ob der Punkt $(5, 6, 7)$ auf der gleichen Seite dieser Ebene liegt wie der Ursprung, ob er auf der anderen Seite liegt oder ob er exakt auf der Ebene liegt. 3 P.

12. Die Punkte $(1, 4, 3)$, $(1, 2, 1)$ und $(1, 0, 3)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf. Weisen Sie rechnerisch nach, dass einer dessen Winkel $90°$ misst. 2 P.

13. Die Punkte $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ und $(2, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ spannen ein Dreieck auf. Berechnen Sie dessen Fläche. 2 P.

14. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

15. Eine Punktspiegelung des $\mathbb{R}^2$ mit zunächst unbekanntem Zentrum bildet den Punkt $(3, 6)$ auf den Punkt $(3, 2)$ ab. Bestimmen Sie rechnerisch das Zentrum der Punktspiegelung. 2 P.

16. Kann es eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ um irgendein Zentrum geben, die den Punkt $(2, 3, 4)$ auf $(3, 4, 5)$ abbildet und den Punkt $(4, 5, 6)$ auf $(3, 4, 4)$? Falls ja, geben Sie eine solche Drehung an; falls nein, begründen Sie das. 2 P.

17. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 2 P.

18. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$ und $(1, 1, 2)$. Eine andere Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$ und $(1, 1, 2)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittmenge dieser beiden Ebenen. 3 P.

19. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} 1x + 0y + 1z + 4u &= 1 \\ 1x + 1y + 1z + 7u &= 1 \\ 2x + 2y + 3z + 16u &= 3 \\ -1x + 1y + 2z + 2u &= 2 \end{aligned}$$

20. Geben Sie eine 3×4-Matrix an, deren Rang gleich zwei ist. (Lösung nicht eindeutig) Welche Dimension hat der Kern? 2 P.

21. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle z, die $z^4 = i$ erfüllen. 2 P.

22. Ein rechtwinkliges Dreieck habe Kanten mit den Längen 3, 4 und 5. Wie kann man per Taschenrechner die Winkel bestimmen? (Formel) 1 P.

23. Drücken Sie $\cos(3x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. 2 P.

24. Geben Sie eine komplexe Zahl $z \neq 2$ an, die $z^3 = 8$ erfüllt. (Lösung als Formel; nicht eindeutig) 2 P.

25. Bestimmen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^2 - 6x + 10 = 0$. 2 P.

26. Ist die Folge $(n^2 - 3n)/(4n^2 + 7\sqrt{n})$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

27. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für eine gebrochenrationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die eine Polstelle bei $x = 1$ besitzt und asymptotisch gegen die Gerade $y = 2x$ strebt. (Lösung nicht eindeutig) 2 P.

28. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x} + \sin(7x) + \frac{2x^3 + 1}{1 + x^2}\right)$$

29. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[1, 2]$ und sei bestimmt durch $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

30. Rechnen Sie aus: 2 P.

$$\int_2^3 \left(7 + \sqrt[3]{x} + \cos(2x)\right) dx$$

31. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\ \cos(x^2 - 9)$. 2 P.

32. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12}$$

33. Berechnen Sie z. B. per partieller Integration (Rechenweg!): 2 P.

$$\int_1^2 x^2\ \ln(x)\, dx$$

34. Schätzen Sie die Fläche eines Viertels der Einheitskreisscheibe per Simpson-Verfahren (ein Doppelstreifen) für die Funktion $\sqrt{1 - x^2}$. 2 P.

35. Entwickeln Sie die auf $\mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ definierte Funktion f an $x = 1$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.