Mathematik für Informatiker Mathematik 1

Jörn Loviscach
4. Oktober 2002

Maximale Punktzahl: 61, Mindestpunktzahl: 25
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $q \wedge \neg p \Rightarrow (p \wedge q) \vee \neg p$ für alle Aussagen p und q. 2 P.

2. Schreiben Sie das Intervall $(-2, 1]$ als Schnittmenge zweier voneinander verschiedener Intervalle. (Lösung nicht eindeutig) 1 P.

3. Schreiben Sie die folgende Menge als Intervall: $M := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$. 1 P.

4. Eine komplexe Zahl z erfülle $z = 3iz + 1$, wobei i die imaginäre Einheit ist. Schreiben Sie z in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a und b. 1 P.

5. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\frac{x^a}{\sqrt{x}} = 2^b$ nach x auf. 1 P.

6. Seien $a > 1$ und x reelle Zahlen. Lösen Sie $\log_{10}(a^x + 2) = 3$ nach x auf. 1 P.

7. Die Menge $\{A, B\}$ bildet mit der in der Tabelle definierte Rechenoperation $\sharp$ *keine* Gruppe. Welche Eigenschaft fehlt? Begründen Sie, woran sie erkennen, dass diese Eigenschaft fehlt. (keine eindeutige Lösung) — 2 P.

$\sharp$	A	B
A	B	A
B	A	A

8. Von einem Polynom $p(x) := ax^2 + bx + c$ mit a, b und $c \in \mathbb{R}$ sei bekannt, dass $p(0) = 0$ und $p(1) = 1$. Ist das Polynom damit eindeutig festgelegt? Falls ja, begründen Sie das. Falls nein, geben Sie zwei verschiedene Beispiele für solche Polynome mit diesen Eigenschaften an. (keine eindeutige Lösung) — 2 P.

9. Im $\mathbb{R}^2$ sei die Gerade gegeben, die durch die Punkte $(2, 3)$ und $(5, 4)$ läuft. Diese Gerade schneidet die x-Achse und die y-Achse in jeweils einem Punkt. Wie lang ist das Geradenstück zwischen den Schnittpunkten? — 2 P.

10. Geben Sie eine Gleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$ an, die den Punkt $(2, 3, 4)$ enthält und senkrecht durch die x-Achse läuft. — 2 P.

11. Von einem Dreieck im $\mathbb{R}^3$ sei die Fläche bekannt (nämlich 4) und seien zwei Eckpunkte gegeben: $(1, 1, 3)$ und $(2, 2, 3)$. Von dem dritten Eckpunkt wisse man, dass er auf der x-Achse liegt. Geben Sie ein Beispiel an, welcher Punkt der dritte sein könnte. (keine eindeutige Lösung) — 3 P.

12. Einen Unterraum welcher Dimension spannen die drei Vektoren $(1, 1)$, $(2, 2)$ und $(3, 3)$ des $\mathbb{R}^2$ auf? Begründung! — 2 P.

13. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: — 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

14. Geben Sie die Matrix einer linearen Abbildung im $\mathbb{R}^2$ an, die den Punkt $(4, 5)$ unverändert lässt. Es soll nicht die Einheitsmatrix sein. (keine eindeutige Lösung) — 2 P.

15. Eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um $+90°$ mit zunächst unbekanntem Mittelpunkt bilde den Punkt $(1, 2)$ auf den Punkt $(4, 3)$ ab. Bestimmen Sie rechnerisch den Drehungsmittelpunkt. — 2 P.

16. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 2 P.

17. Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(0, 1, 1)$ und $(3, 2, 1)$. Eine andere Gerade im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(2, 4, 1)$ und $(5, 5, 2)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittmenge der beiden Geraden. 2 P.

18. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (Pivotisierung unnötig) die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 0z + 3u &= 2 \\ 2x + 3y + 1z + 2u &= 2 \\ 2x + 2y + 1z + 4u &= 3 \\ 1x + 1y + 1z - 1u &= 1 \end{aligned}$$

19. Geben Sie eine reelle 3×3-Matrix an, deren Bild die xy-Ebene ist und deren Kern die z-Achse ist. (Lösung nicht eindeutig) 2 P.

20. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle z mit $z^2 = z$. 2 P.

21. In einem rechtwinkligen Dreieck habe die Hypotenuse die Länge 4; eine Kathete besitze die Länge 3. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks. 1 P.

22. Drücken Sie $\sin(4x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. 2 P.

23. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $2x^2 - 8x + 14 = 0$. 2 P.

24. Ist die Folge $\frac{42+\sin(n^7)}{n^7+\cos(n)}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

25. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für eine reelle gebrochenrationale Funktion f an, welche bei $x = 1$ eine Nullstelle hat, bei $x = 2$ eine Polstelle besitzt und asymptotisch gegen $y = \frac{x}{3} + 4$ strebt. (Lösung nicht eindeutig) 3 P.

26. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx}\left(3 + \frac{1}{x^4+1} + \ln(2x) + \frac{x^2+1}{x^2+3}\right)$$

27. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[0, 2]$ und sei bestimmt durch $f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Was ist der kleinste Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

28. Rechnen Sie aus: 2 P.

$$\int_1^2 \Big(5 + 2x^3 + \sin(3x + 2)\Big)\, dx$$

29. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit 2 P.

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

30. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^2 \frac{4}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

31. Lösen Sie mittels partieller Integration das Integral vollständig auf (Rechenweg!): 2 P.

$$\int_1^2 x^3 \ln(x)\, dx$$

32. Schätzen Sie $\int_0^2 \exp(x^2)\, dx$ per Simpson-Verfahren mit zwei Doppelstreifen. 2 P.

33. Entwickeln Sie die auf $x \in (-2, 2)$ durch $f(x) := 1/(x^2 - 4)$ definierte Funktion f an $x = 1$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.