Mathematik für Informatiker
Mathematik 1

Jörn Loviscach
12. Juli 2002

Maximale Punktzahl: 64, Mindestpunktzahl: 26
Dauer: drei Zeitstunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $\neg((\neg p) \vee q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$ für alle Aussagen p und q. — 2 P.

2. Schreiben Sie das Intervall $(3, 4)$ als Differenzmenge zweier Intervalle. (Lösung nicht eindeutig) — 1 P.

3. Das Intervall $[0, 3)$ lässt sich als schreiben als $[-1, 3) \cap M$, wobei M ein anderes Intervall ist. Geben Sie zwei verschiedene Beispiele für solche M an. — 1 P.

4. Lösen Sie nach $z \in \mathbb{C}$ auf: $2z - 6iz + 3 = 0$. Schreiben Sie z in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a und b. — 1 P.

5. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\sqrt{\frac{a}{x^b} + 7} = 5$ nach x auf. — 1 P.

6. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $\ln(1 + x^a) = 2^b$ nach x auf. 1 P.

7. Die Menge $\{A, B, C\}$ wird durch die in der Tabelle definierte Rechenoperation $\sharp$ zu einer Gruppe. Was ist das inverse Element zu A? Warum? 2 P.

$\sharp$	A	B	C
A	C	A	B
B	A	B	C
C	B	C	A

8. Das Polynom $p(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit zunächst unbekannten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft, dass $p(-1) = 0$, $p(0) = 3$, $p(1) = 0$ und $p(2) = 0$. Geben Sie a, b, c und d als Zahlenwerte an. 2 P.

9. Im $\mathbb{R}^2$ sei der Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$ und Radius 4 gegeben. Geben Sie eine Gleichung für eine Gerade an, die in die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft und die Kreislinie tangential streift. (Lösung nicht eindeutig) 2 P.

10. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die den $\mathbb{R}^3$ so zerschneidet, dass im einen Halbraum der Ursprung liegt, im anderen Halbraum der Punkt $(1, 2, 3)$. Lösungsweg! (keine eindeutige Lösung) 2 P.

11. Ergänzen Sie die beiden Punkte $(1, 2, 3)$ und $(4, 3, 2)$ so um einen weiteren, von beiden verschiedenen Punkt des $\mathbb{R}^3$, dass die drei Punkte ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen. (keine eindeutige Lösung) An welchem Punkt liegt bei Ihrer Lösung der rechte Winkel? 2 P.

12. Liegen die vier Punkte $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$ und $(3, 2, 1)$ des $\mathbb{R}^3$ alle in einer Ebene? Begründung! 2 P.

13. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ bilde sowohl den Punkt $(4, 5)$ als auch den Punkt $(6, 5)$ auf den Punkt $(3, 2)$ ab. Geben Sie die Matrix der linearen Abbildung an. 2 P.

15. Eine Achsenspiegelung des $\mathbb{R}^2$ bilde den Punkt $(2,3)$ auf den Punkt $(3,4)$ ab. Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung für die Spiegelungsachse. (Lösung nicht eindeutig) — 2 P.

16. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. — 2 P.

17. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1,0,0)$, $(2,0,1)$ und $(2,2,2)$. Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(3,4,0)$ und $(3,6,1)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittmenge von Ebene und Gerade. — 3 P.

18. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (ohne Pivotisierung) die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: — 2 P.

$$\begin{aligned} 1x + 0y + 2z + 3u &= 0 \\ 1x + 0y + 3z + 3u &= 1 \\ 2x + 1y + 5z + 6u &= 0 \\ -1x + 2y - 2z - 2u &= 1 \end{aligned}$$

19. Geben Sie eine reelle Matrix an, die gleichzeitig beide folgenden Eigenschaften erfüllt: Das Bild besitzt zwei Dimensionen, der Kern besitzt drei Dimensionen. (Lösung nicht eindeutig) — 2 P.

20. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle z, deren Quadrat z^2 die Länge 4 besitzt. — 2 P.

21. Von einem Dreieck sei bekannt, dass eine seiner Kanten die Länge 2 hat, eine andere die Länge 3 hat und dass der Winkel zwischen diesen beiden Kanten $40°$ beträgt. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks. — 1 P.

22. Drücken Sie $\tan(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die es definiert ist, ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. — 2 P.

23. Geben Sie eine Gleichung für $z \in \mathbb{C}$ an, die genau folgende beiden Lösungen hat: $z = 1 + i$, $z = -1 - i$. (Die anzugebende Gleichung ist nicht eindeutig festgelegt.) — 2 P.

24. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^2 + 6x + 13 = 0$. — 2 P.

25. Ist die Folge $(\sin(n) - n)/(\sqrt{n} + n^3)$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? — 1 P.

26. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für eine reelle gebrochenrationale Funktion f an, welche bei $x = 1$ von oben nach unten durch die x-Achse läuft, bei $x = 3$ die x-Achse von oben berührt und bei $x = 2$ eine Polstelle besitzt. (Lösung nicht eindeutig) 3 P.

27. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4} + \exp(x^2) + \frac{x+2}{2+\sin(x)}\right)$$

28. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[1, 2]$ und sei bestimmt durch $f(x) := -x^3 + 3x^2 + 3x$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

29. Rechnen Sie aus: 2 P.

$$\int_1^2 \Big(5x^4 + \cos(x+2) + \exp(2x)\Big)\,dx$$

30. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit 2 P.

$$f(x) := (2 + \cos(x))^3 \,\sin(x).$$

31. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^3 \frac{x}{x^2 - 3x - 4}\,dx$$

32. Lösen Sie mittels mehrfacher partieller Integration das Integral vollständig auf (Rechenweg!): 3 P.

$$\int_2^3 x^2 \,\sin(x)\,dx$$

33. Zeigen Sie, dass das Simpson-Verfahren mit zwei Doppelstreifen für das Integral $\int_{-2}^{2}(x^3 + x^2)\,dx$ das exakte Ergebnis liefert. 2 P.

34. Entwickeln Sie die auf $x \in (0, \infty)$ durch $f(x) := \ln(x)$ definierte Funktion f an $x = 2$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.