Mathematik für Informatiker (MI)
Probeklausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
3. Februar 2002

Maximale Punktzahl: 30, Mindestpunktzahl: 12
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
selbstverfasste Formelsammlung (mit abzugeben) von drei einseitig beschriebenen, mit bloßem Auge lesbaren DIN-A4-Seiten; keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript)

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = \frac{x}{y^2+1}$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Niveaulinie mit $f(x,y) = 0$ und die Niveaulinie mit $f(x,y) = 1$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = y^2 \cos(x-3)$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(3,2)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(3{,}1, 1{,}8)$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = (x^2+1)(1-y^2)$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Begründung! — 3 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x^2 y$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Parallelogramms mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$ und $(0,1)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über das obere rechte Viertel der Einheitskreisscheibe. (Polarkoordinaten!) — 2 P.

6. Ergänzen Sie die folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise so, dass die Kurve beim Parameterwert $t = 3$ parallel zur x-Achse verläuft: 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ ? \end{pmatrix}$$

7. Skizzieren Sie den Verlauf folgender Kurve zwischen $t = 2$ und $t = 3$. Welcher Figur entspricht die Kurve geometrisch? 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\,(t-2)^2) \\ \sin(2\pi\,(t-2)^2) \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve zwischen $t = 0$ und $t = 1$: 2 P.

$$\vec{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 \\ 8t^{3/2} \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 3 sei auf $[0, 3)$ definiert durch $f(t) = t-2$ und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/3}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwickeln. Bestimmen Sie die komplexe Zahl c_6. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 3$ summiert. Hilfsmittel: $\int_0^a dt\, t\, e^{ibt} = (e^{iab}(1 - iab) - 1)/b^2$ für alle reellen Zahlen a und b, $b \neq 0$. 2 P.

10. Eine bestimmte Tierart ernähre sich nur von einer bestimmten Nahrungsart. Der Bestand an Tieren dieser Art und an ihrer Nahrung ändere sich nur durch folgende Prozesse: 2 P.

    - Pro Tier und Jahr vermehrt sich der Bestand um $0,5$ Jungtiere.
    - Pro Jahr sterben 2 Prozent der Tiere.
    - Jedes Tier frisst pro Jahr 100 kg an Nahrung.
    - Pro vorhandenem kg an Nahrung wachsen in einem Jahr 0,8 kg nach.

    Die Zahl der Tiere heiße z, die Menge der Nahrung heiße n. Interpretieren Sie z näherungshalber als reelle Zahl statt als ganze Zahl (d. h. z sei hinreichend groß). Stellen Sie für die Zeitabhängigkeit von z und n eine Differentialgleichung auf (nur aufstellen, nicht lösen). Benutzen Sie dabei korrekte Einheiten.

11. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = y^2 \cos(x)$ zum an $x = 0$ vorgegebenen Startwert $y_0 > 0$. 2 P.

12. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 5y = 0$ für $x \to +\infty$? Rechenweg! 2 P.

13. Zwei Würfel seien unabhängig, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse (Rechenweg!): 2 P.

$$A = \{\text{Die Summe beider Augenzahlen beträgt 4.}\},$$

$$B = \{\text{Mindestens einer der Würfel zeigt die Augenzahl 1.}\}$$

14. Auf den Seiten A und B Ihres Servers stellen Sie dasselbe Programm zum Download bereit. Im letzten Monat haben Sie doppelt soviele Besucher auf der Seite A registriert wie auf der Seite B. 40 Prozent der Besucher von A haben das Programm heruntergeladen, aber nur 30 Prozent der Besucher von B. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Download von einem Besucher der Seite B (statt A) durchgeführt wurde? 2 P.

15. Sie betreiben einen Server mit 1000 Benutzern. Jeder davon greife pro Tag drei-, vier- oder fünfmal auf den Server zu. Die Verteilung der Zugriffszahl sei dabei: dreimal in 20 Prozent der Fälle, viermal in 60 Prozent, fünfmal in 20 Prozent. Jeder Benutzer handele unabhängig von den anderen. Finden Sie ein genähertes Modell, wie die Zufallsgröße 2 P.

$$X = \text{Gesamtzahl der Zugriffe an einem bestimmten Tag}$$

verteilt ist. Stellen Sie damit eine Formel auf (nicht ausrechnen), wie sich in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit berechnen läßt, dass an einem bestimmten Tag 600 oder mehr Zugriffe erfolgen.